

KORRESPONDENZEN:
Ihre Anwendung auf ein Gleichgewichtsproblem
der Ökonomie

Hans-Günther Seifert

1974
—





Digitized by the Internet Archive
in 2026

KORRESPONDENZEN:

Ihre Anwendung auf ein Gleichgewichtsproblem der Ökonomie

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Hans-Günther Seifert

Der Fakultät zur Beurteilung eingereicht: Oktober 1973



1. Berichterstatter: Prof. Dr. V. Mammitzsch

2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Richter

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Januar 1974

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
Bezeichnungen	3
I. Kapitel: Korrespondenzen	7
§ 1 Topologische Eigenschaften von Korrespon- denzen	8
§ 2 Die Meßbarkeit von Korrespondenzen	33
§ 3 Die Integration von Korrespondenzen	49
§ 4 Der Satz von den Übergangswahrscheinlich- keiten für Korrespondenzen	64
II. Kapitel: Ein Konkurrenzgleichgewichtsproblem	74
§ 5 Heuristisches zum Modell einer Wirtschaft	74
§ 6 Die mathematischen Voraussetzungen und ihre wirtschaftstheoretische Motivierung	84
§ 7 Der Existenzsatz für das Konkurrenzgleich- gewicht	91
Liste der verwendeten Symbole	112
Zusammenfassung	115
Literaturverzeichnis	117

Einleitung

Im Jahre 1874 formulierte der Nationalökonom L. Walras ein wirtschaftliches Modell mit "vielen" Verbrauchern und Produzenten, von denen jeder allein sich nur gemäß seinen eigenen Interessen verhält, [34]. Er vermutete, daß vermöge eines "Preismechanismus" die vorhandenen Güter so unter die Verbraucher verteilt werden können, daß jeder einzelne, gemessen an seinen Möglichkeiten, mit dem ihm bei dieser Verteilung zukommenden Anteil zufrieden ist. - Eine solche Verteilung wird als Walras'sches Konkurrenzgleichgewicht oder kurz als Konkurrenzgleichgewicht bezeichnet.

Erst in den 50-er Jahren konnte die Walras'sche Vermutung durch exakte mathematische Formulierungen und Beweise bestätigt werden, z. B. in [1], [26]. Durch die Anwendung der Theorie der Korrespondenzen gelang es G. Debreu in [14] und [15], R. J. Aumann in [4] und W. Hildenbrand in [20], die mathematische Formulierung zu vereinfachen und das Modell wesentlich zu verallgemeinern.

In all diesen Aufsätzen wird eine feste endliche Anzahl von Warenarten vorausgesetzt. Wir wollen in der vorliegenden Arbeit beliebig viele Warenarten zulassen. Diese Annahme findet sich bereits in dem kürzlich erschienenen Aufsatz von T. F. Bewley, [7], in dem jedoch andere mathematische Methoden verwendet werden als in dieser Arbeit. Während T. F. Bewley endlich viele Wirtschaftssubjekte in seinem Modell voraussetzt, betrachten wir den allgemeinen Fall eines beliebigen abstrakten "Maßraumes von Wirtschaftssubjekten".

Außerdem schlagen wir eine Erweiterung des Modells vor, die dem Unsicherheitsphänomen Rechnung tragen soll. Der dabei eingeschlagene Weg unterscheidet sich von den Lösungsansätzen, wie sie in [8], [30] und [33] gefunden wurden.

Es wird sich zeigen, daß auch in diesem so verallgemeinerten Modell ein Konkurrenzgleichgewicht existiert. - Ein großer Teil der von uns verwendeten mathematischen Hilfsmittel stammt aus der Theorie der Korrespondenzen, die, gestützt auf Aufsätze von G. Debreu, [16], W. Hildenbrand, [19], und R. Wegmann [35], im 1. Teil der Arbeit bereitgestellt werden.

Bezeichnungen

Die Menge $\{1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{N}$. $\mathbb{N}_0$ ist die Menge $\mathbb{N} \cup \{0\}$. $\mathbb{R}$ steht für die Menge der reellen Zahlen, während $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen und $\bar{\mathbb{R}}$ die Menge $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ist. λ ist das Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}$.

Ist A eine abstrakte Menge, so ist $|A| \equiv$ Anzahl der Elemente von A . Komplementbildung kennzeichnen wir mit $[\cdot]$, also etwa $[B]$. Mit 1_B bezeichnen wir die Indikatorfunktion einer Teilmenge B von A , also $1_B(x) := \begin{cases} 1 & ; x \in B \\ 0 & ; x \notin B \end{cases}$.

Betrachten wir jetzt einen topologischen Raum $(E, \mathcal{T})$. Für eine Teilmenge $B \subset E$ ist $\bar{B}$ die abgeschlossene Hülle und $\text{int } B$ der offene Kern von B . Für eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ verstehen wir unter $\text{cl } \{x_k; k \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Häufungspunkte von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Mit $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ bezeichnen wir die Borelschen Teilmengen von $(E, \mathcal{T})$. Ist $\mathcal{V}$ eine beliebige Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$, so schreiben wir $\mathcal{A}(\mathcal{V})$ für die von $\mathcal{V}$ erzeugte σ -Algebra. Speziell ist also $\mathcal{L}(\mathcal{T}) = \mathcal{A}(\mathcal{T})$. - Wenn die Topologie auf E durch eine Metrik d gegeben ist, schreiben wir oft (E, d) statt $(E, \mathcal{T})$. Mit $K_d(x; \epsilon)$ bezeichnen wir die offene Kugel um x mit Radius ϵ , und mit $K'_d(x; \epsilon)$ die abgeschlossene Kugel um x mit Radius ϵ , jeweils bezüglich der Metrik d .

Lineare Räume sind in dieser Arbeit stets lineare Räume über $\mathbb{R}$. Wir sagen, zwei lineare Räume E und F bilden ein Dualsystem oder ein duales Paar, wenn es eine Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : F \times E \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

- (i) Zu jedem $x \in E$, $x \neq 0$, gibt es ein $x' \in F$ mit $\langle x', x \rangle \neq 0$.
- (ii) Zu jedem $x' \in F$, $x' \neq 0$, gibt es ein $x \in E$ mit $\langle x', x \rangle \neq 0$;

d. h. die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist trennend. In diesem Fall schreiben wir $\langle F, E \rangle$ für das Dualsystem. Eine Topologie τ_E auf E heißt zulässig bezüglich des dualen Paares $\langle F, E \rangle$, wenn τ_E eine lokalkonvexe Hausdorffsche Topologie und $(E, \tau_E)'$ ($\equiv$ die Menge aller stetigen linearen Funktionale auf (E, τ_E)) gleich F ist. Analog definiert man die Zulässigkeit einer Topologie τ_F auf F . Spezielle, oft verwendete zulässige Topologien sind die schwache Topologie $\sigma(E, F)$ auf E und die schwache Topologie $\sigma(F, E)$ auf F . Da für jede zulässige Topologie τ_E auf E die abgeschlossenen konvexen Mengen dieselben sind, sprechen wir oft von abgeschlossenen konvexen Mengen ohne Angabe einer bestimmten zulässigen Topologie. Ebenso ist die Bildung der abgeschlossenen konvexen Hülle $\overline{co}$ zu verstehen.

Die Polare einer Menge $M \subset E$ ist die Menge $M^0 = \{x' \in F: \langle x', x \rangle \leq 1 \ \forall x \in M\}$. Die absolute Polare von M bezeichnen wir mit M^* , also:

$$M^* = \{x' \in F: |\langle x', x \rangle| \leq 1 \ \forall x \in M\}.$$

Ein konvexer Kegel C in E mit Spitze O ist eine Teilmenge von E mit:

$$(iii) \ C + C \subset C \quad (\text{Minkowskische Summe})$$

$$(iv) \ \lambda C \subset C \quad \forall \lambda \geq 0$$

Gilt statt (iv)

$$(iv)^*: \lambda C \subset C \quad \forall \lambda > 0$$

so heißt C stumpfer konvexer Kegel mit Spitze O .

Für eine beliebige Teilmenge K von E ist $\text{cone } K$ der von K erzeugte konvexe Kegel in E mit Spitze O . Für konvexes K gilt die Beziehung: $\text{cone } K = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda K$.

Unter dem dualen Kegel C' in F eines konvexen Kegels C in E mit Spitze O verstehen wir die Menge $C' =$

$$\{x' \in F: \langle x', x \rangle \geq 0 \ \forall x \in C\} = -C^0. \ C' \text{ ist ein konvexer}$$

Kegel in F mit Spitze 0 . Für den zu C' dualen Kegel C'' in E gilt: $C'' = \bar{C} = \overline{C \cup \{0\}}$ (vgl. etwa [29], § 4).

Durch einen konvexen Kegel C mit Spitze 0 kann mittels der Vorschrift $x \overset{C}{\leq} y: \Leftrightarrow y - x \in C$ eine reflexive und transitive Vektorordnung auf E gegeben werden.

Ist $C = \bar{C}$, so ist $x \overset{C}{\leq} y$ äquivalent mit der Beziehung:

$$\langle x', x \rangle \leq \langle x', y \rangle \quad \forall x' \in C'.$$

Für eine Teilmenge K in E definieren wir die Stützfunktion von K

$$h(\cdot; K): F \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ durch}$$

$$h(x'; K) = \begin{cases} \inf_{x \in K} \langle x', x \rangle & , \text{ falls } K \neq \emptyset. \\ +\infty & , \text{ falls } K = \emptyset. \end{cases}$$

Die Stützfunktion einer nichtleeren Teilmenge K von E ist

- (v) oberhalb stetig (bezüglich jeder zulässigen Topologie τ_F auf F),
- (vi) konkav,
- (vii) positiv homogen.

Außerdem gilt:

$$(viii) \quad h(x'; K) = h(x'; \bar{K}) = h(x'; \overline{C \cap K}) \quad \forall x' \in F$$

$$(ix) \quad \overline{C \cap K} = \bigcup_{x' \in F} \{x \in E: \langle x', x \rangle \geq h(x'; K)\};$$

(vgl. [35]).

Ist $(W, \mathcal{A})$ ein Maßraum, dann sagen wir: Eine Abbildung $f: W \rightarrow E$ ist $\langle F, E \rangle$ -meßbar, wenn $\forall x' \in F$ die reellen Funktionen $\langle x', f(\cdot) \rangle$ meßbar sind.

Eine Funktion $f: W \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ nennen wir quasiintegrierbar bezüglich eines Maßes m auf $(W, \mathcal{A})$, wenn entweder

$f^+ := \sup(f, 0)$ oder $f^- := -\inf(f, 0)$ integrierbar bezüglich m sind.

Ist M eine beliebige Menge, so bezeichnen wir mit

$\mathcal{P}_0(M) := \{B \subset M; B \neq \emptyset\}$ und mit $\mathcal{Q}(M)$ oder kurz $\mathcal{Q}$ eine beliebige nichtleere Teilmenge von $\mathcal{P}_0(M)$. Für eine Teilmenge A von M ist $A^a_{\mathcal{Q}} := \{B \in \mathcal{Q}; B \subset A\}$ und $A^i_{\mathcal{Q}} := \{B \in \mathcal{Q}; B \cap A \neq \emptyset\}$.

Für die Systeme $A^a_{\mathcal{Q}}$ und $A^i_{\mathcal{Q}}$ gelten die Beziehungen:

$$(x) \quad M^i_{\mathcal{Q}} = M^a_{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}$$

$$(xi) \quad A^i_{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q} \setminus ([A]_{\mathcal{Q}})^a$$

$$(xii) \quad A^a_{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q} \setminus ([A]_{\mathcal{Q}})^i$$

Ist $(A_j)_{j \in I}$ eine Familie in $\mathcal{P}_0(M)$ mit beliebiger nichtleerer Indexmenge I , so gilt:

$$(xiii) \quad \left[\bigcup_{j \in I} A_j \right]_{\mathcal{Q}}^i = \bigcup_{j \in I} A_j^i_{\mathcal{Q}}$$

$$(xiv) \quad \left[\bigcap_{j \in I} A_j \right]_{\mathcal{Q}}^a = \bigcap_{j \in I} A_j^a_{\mathcal{Q}}.$$

Existiert auf M eine Topologie τ , so sei $\mathcal{F}(M)$ die Menge der abgeschlossenen nichtleeren Teilmengen von M , oder $\mathcal{L}(M)$ die Menge der kompakten nichtleeren Teilmengen von M .

Besitzt M noch eine lineare Struktur, so sei $\mathcal{F}_c(M)$ die Menge der nichtleeren abgeschlossenen konvexen Teilmengen von M und $\mathcal{L}_c(M)$ die Menge der nichtleeren konvexen kompakten Teilmengen von M .

I. Kapitel: Korrespondenzen

Eine Korrespondenz von der Menge A zur Menge B ist eine Abbildung, die jedem Element von A eine nichtleere Teilmenge von B zuordnet. Zur Kennzeichnung von Korrespondenzen verwenden wir große lateinische oder kleine griechische Buchstaben, etwa $X:A \rightarrow \mathcal{P}_0(B)$ oder $\phi:A \rightarrow \mathcal{P}_0(B)$. Wie üblich ist für $S \subset \mathcal{P}_0(B)$ das Urbild $\phi^{-1}(S) := \{a \in A : \phi(a) \in S\}$ definiert. Ist S ein System $C^+_{\mathcal{G}}$ oder $C^a_{\mathcal{G}}$ mit $C \subset B$ und $\phi:A \rightarrow \mathcal{G}$ mit $\phi \neq \mathcal{G} \subset \mathcal{P}_0(B)$ gegeben, so nennen wir $\phi^i(C) := \phi^{-1}(C^i_{\mathcal{G}})$ das innere und $\phi^a(C) := \phi^{-1}(C^a_{\mathcal{G}})$ das äußere Urbild von C. Unter dem Graphen der Korrespondenz ϕ verstehen wir - in Abweichung vom entsprechenden Begriff bei Abbildungen - die Menge $G(\phi) := \{(a,b) \in A \times B : b \in \phi(a)\}$. Ist A_0 eine Teilmenge von A, so heißt $\phi(A_0) := \bigcup_{a \in A_0} \phi(a)$ das Bild von A_0 unter ϕ . -

Wir wollen die Theorie der Korrespondenzen auf Probleme der Gleichgewichtsanalyse in der Wirtschaftstheorie anwenden, und stellen die Resultate im I. Kapitel unter diesem Gesichtspunkt zusammen. Daher erheben wir keinen Anspruch auf Vollständigkeit; insbesondere bleiben Ergebnisse über Korrespondenzen, die speziell in der Funktionentheorie und der Kontrolltheorie hergeleitet und verwendet wurden, unberücksichtigt. Es sei hier an die Arbeit von P. Dierolf, [17], erinnert, welche einen Überblick über die topologischen Fragestellungen im Zusammenhang mit Korrespondenzen gibt. Bereits in anderen Arbeiten bewiesene und von uns benötigte Sätze zitieren wir im allgemeinen ohne Beweis. Nur an manchen Stellen erschien es uns unter dem Aspekt

einer einheitlichen und einfacheren Darstellung notwendig, von anderen Autoren gezeigte Sätze noch einmal zu beweisen. Dabei werden wir jedoch stets auf entsprechende Literaturstellen verweisen.

§ 1: Topologische Eigenschaften von Korrespondenzen

In diesem Paragraphen wollen wir auf Teilmengen der Potenzmenge eines topologischen Raumes verschiedene Topologien einführen, die Zusammenhänge zwischen diesen Topologien studieren, und die dazugehörigen Stetigkeitsbegriffe diskutieren.

Es sei (E, τ) ein topologischer Raum und $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(E)$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathcal{P}_0(E)$. Wichtig für uns sind die folgenden Topologien auf $\mathcal{Q}$.

- (1.1) Definition:
- a) Die äußere Topologie $\mathcal{T}_a$ auf $\mathcal{Q}$ ist die Topologie, die als Subbasis die Menge $\mathcal{T}_a = \{B_{\mathcal{Q}}^a; B \in \tau\}$ besitzt.
 - b) Die innere Topologie $\mathcal{T}_i$ auf $\mathcal{Q}$ ist die Topologie, die als Subbasis die Menge $\mathcal{T}_i = \{B_{\mathcal{Q}}^i; B \in \tau\}$ besitzt.
 - c) Die Exponentialtopologie $\mathcal{Q}$ auf $\mathcal{Q}$ ist die obere Grenze der Topologien $\mathcal{T}_i$ und $\mathcal{T}_a$, d. h. $\mathcal{Q}$ besitzt $\mathcal{T}_i \vee \mathcal{T}_a$ (und damit auch $\mathcal{T}_i \vee \mathcal{T}_a$) als Subbasis.

Wir wählen die Bezeichnungen "äußere" und "innere Topologie" in Anlehnung an die z. B. von W. Hildenbrand in [19] eingeführten Stetigkeitsbegriffe, die zu diesen Topologien gehören; (vgl. den zweiten Teil dieses Paragraphen).

Die "Exponentialtopologie" ist ein wohlbekannter Begriff in der Topologie, vgl. etwa [24].

Wir bemerken, daß die Menge $\mathcal{T}_a$ sogar eine Basis von $\mathcal{T}_a$ ist, während - wie man sich an einfachen Beispielen klar machen kann - im allgemeinen $\mathcal{T}_i$ keine Basis, sondern nur Subbasis von $\mathcal{T}_i$ ist.

Ist die Topologie τ auf E durch eine Metrik d gegeben - wir schreiben dann (E, d) statt (E, τ) -, so kann auf $\mathcal{Q}$ eine weitere Topologie erklärt werden. Dazu führen wir auf $\mathcal{Q}$ den Hausdorff-Abstand e folgendermaßen ein:

Es sei $e_1: \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$e_1(A, B) := \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y)$$

Im allgemeinen ist, wie man sich leicht überlegen kann, $e_1(A, B) \neq e_1(B, A)$. Der Hausdorff-Abstand $e: \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ wird dann durch

$$e(A, B) := \max(e_1(A, B), e_1(B, A))$$

erklärt.

Man verwechsle den Hausdorff-Abstand $e(A, B)$ der Mengen A und B nicht mit dem in manchen Lehrbüchern in metrischen Räumen eingeführten Abstand $d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$

$$x \in A, y \in B$$

Zur Verdeutlichung des Begriffes betrachten wir den Fall $E = \mathbb{R}^2$, ausgestattet mit dem üblichen euklidischen Abstand. Es sei A die Kugel um den Punkt $(0, 0)$ mit Radius 1 und B die Kugel um den Punkt $(1, 0)$ mit Radius $1/2$. Damit berechnet sich:

$$e_1(A, B) = 3/2, e_1(B, A) = 1/2,$$

$$\text{also } e(A, B) = 3/2.$$

$$\text{Dagegen ist } d(A, B) = 0.$$

e besitzt die Eigenschaften einer Pseudometrik (im Sinne von [9]), d. h. es gilt:

- (i) $e(A,B) \geq 0$, $\forall A,B \in \mathcal{G}$
- (ii) $e(A,A) = 0$, $\forall A \in \mathcal{G}$
- (iii) $e(A,B) = e(B,A)$ $\forall A,B \in \mathcal{G}$
- (iv) $e(A,C) \leq e(A,B) + e(B,C) \forall A,B,C \in \mathcal{G}$

Einen Beweis dafür findet man in [18].

Durch diese Pseudometrik h wird auf $\mathcal{G}$ eine uniforme Struktur definiert, die als Basis ihres Nachbarschafts-filters die Mengen $e^{-1}([0,r])$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, besitzt. Die Pseudometrik e ist äquivalent zu der Halbmetrik (im Sinne von [9]) $\hat{e}$, die durch:

$$\hat{e}(A,B) := \min(1, e(A,B))$$

definiert ist; d. h. $\hat{e}$ erzeugt auf $\mathcal{G}$ dieselbe uniforme Struktur wie e .

(1.2) Definition: Ist (E,d) ein metrischer Raum. Dann ist die metrische Topologie $\mathcal{L}_m$ auf $\mathcal{G}$ die von der Halbmetrik $\hat{e}$ induzierte Topologie.

Im allgemeinen ist der topologische Raum $(\mathcal{G}, \mathcal{L}_m)$ ein halbmetrischer Raum. Nur in den Fällen, in denen $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}(E)$ ist, besitzt $\hat{e}$ die Eigenschaften einer Metrik, da

$$\hat{e}(A,B) = 0 \iff e(A,B) = 0 \iff A = \bar{A} = \bar{B} = B$$

gilt.

Falls $\mathcal{G}$ Teilmenge von $\mathcal{L}(E)$ ist, so ist e sogar eine Metrik. Wir vereinbaren, in diesen Fällen mit e statt mit $\hat{e}$ zu arbeiten.

Um die Basis von $\mathcal{L}_m$ charakterisieren zu können, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

Sei $C \in \mathcal{G}$ und $r \in \mathbb{R}^+$, dann definieren wir:

$W_r(C) := \{B \in \mathcal{G} ; e(C, B) \leq r\}$, die "abgeschlossene Kugel",

$V_r(C) := \{B \in \mathcal{G} ; e(C, B) < r\}$, die "offene Kugel", und

$R_r(C) := \{B \in \mathcal{G} ; e(C, B) = r\}$, die "Sphäre".

Analog werden die zu $\hat{e}$ gehörenden Mengen $\hat{W}_r(C)$, $\hat{V}_r(C)$ und $\hat{R}_r(C)$ erklärt.

Man rechnet sofort nach, daß für

$0 < r < 1$: $W_r(C) = \hat{W}_r(C)$ und $R_r(C) = \hat{R}_r(C)$, für

$0 < r \leq 1$: $V_r(C) = \hat{V}_r(C)$, für

$r > 1$: $\hat{V}_r(C) = \mathcal{G}$ gilt.

Außerdem ergibt sich, daß die Menge

$$\mathcal{T}_m := \{V_r(C); C \in \mathcal{G}, 0 \leq r < 1\} \cup \{\mathcal{G}\}$$

eine Basis von $\mathcal{L}_m$ ist.

Die nächsten Sätze bringen Aussagen über die Zusammenhänge zwischen $\mathcal{L}_a$, $\mathcal{L}_i$, $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}_m$.

(1.3) Satz: Es sei E ein metrischer Raum und $\mathcal{G}$ eine nicht-leere Teilmenge von $\mathcal{P}_0(E)$. Dann gilt:

a) Die Topologie $\mathcal{L}_m$ ist feiner als die Topologie

$$\mathcal{L}_i, \text{ d. h. } \mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}_m$$

b) Ist E zusätzlich separabel, so ist $\mathcal{T}_m \subset \mathcal{A}(\mathcal{T}_i)$.

Beweis:

a) Wir zeigen: $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{L}_m$. Dazu sei B eine offene Menge in E und $C \in \mathcal{B}_{\mathcal{G}}^i$, d. h. es existiert ein $x \in B \cap C$ und dazu ein $r > 0$ mit $K(x; r) \subset B$, (o.B.d.A.: $r < 1$). Nun betrachten wir die Umgebung $V_{\frac{r}{2}}(C)$ in $\mathcal{G}$. Diese Menge liegt noch ganz in

$\mathcal{B}_{\mathcal{G}}^i$: Ist nämlich $D \in V_{\frac{r}{2}}(C)$, d. h. ist $e_1(D, C) < \frac{r}{2}$, so

ist $\forall z \in C \ d(z, D) < \frac{r}{2}$, also speziell für das oben gefundene x . Das bedeutet aber die Existenz eines $y \in D$ mit $d(x, y) < r$, woraus folgt: $D \cap K(x; r) \neq \emptyset$. Daher ist $D \cap B \neq \emptyset$. Also liegt D in $B_{\mathcal{G}}^i$, und damit $B_{\mathcal{G}}^i$ in $\mathcal{I}_m$.

b) Es sei jetzt E separabel. Wegen $E_{\mathcal{G}}^i = \mathcal{G}(E)$ liegt $\mathcal{G}$ in $\mathcal{I}_i$, erst recht also in $\mathcal{A}(\mathcal{I}_i)$.

Wählen wir jetzt ein $A \in \mathcal{G}$ und ein r zwischen 0 und 1 - der Fall $r = 0$ ist trivial. Wir müssen nachweisen, daß $V_r(A)$ in $\mathcal{A}(\mathcal{I}_i)$ liegt. Dazu zeigen wir, daß $W_r(A)$ in $\mathcal{A}(\mathcal{I}_i)$ liegt; denn es gilt die Relation:

$$V_r(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_{r - \frac{1}{n}}(A).$$

Bezeichnen wir mit S die nach Voraussetzung existierende abzählbare dichte Teilmenge von A und mit $(A; r)'$ die Menge aller Punkte $x \in E$ mit $d(x, A) \leq r$.

Für $W_r(A)$ behaupten wir die Darstellung:

$$(1) \quad W_r(A) = (A; r)' \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \in S} (K(s; r + \frac{1}{n}))_{\mathcal{G}}^i.$$

Wir setzen die rechte Seite von (1) gleich D_1 .

Liegt B in $W_r(A)$, dann ist $e_1(B, A)$ und $e_1(A, B) \leq r$ bzw. $\forall y \in B \ d(y, A) \leq r$, und $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in A \ d(x, B) < r + \frac{1}{n}$. Daher ist B eine Teilmenge von $(A; r)'$, während $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in A$ ein $y \in B$ existiert, so daß $d(x, y) < r + \frac{1}{n}$, was gerade besagt, daß $B \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{x \in A} (K(x; r + \frac{1}{n}))_{\mathcal{G}}^i$. Damit liegt B insgesamt in D_1 .

Wählen wir umgekehrt ein B aus D_1 , so gilt sofort wegen $B \subset (A; r)'$, daß $d(y, A) \leq r \ \forall y \in B$, was bedeutet: $e_1(B, A) \leq r$. Überlegen wir, daß auch $e_1(A, B) \leq r$ ist: Aus der Separabilität von A folgt, daß $\forall x \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$ ein $s(x) \in S$ existiert, so daß $d(x, s(x)) < \frac{1}{n}$. Da außerdem

$\forall s \in S \ \forall n \in \mathbb{N} \ B \cap K(s; r + \frac{1}{n}) \neq \emptyset$ ist, folgt mittels der Dreiecksungleichung, daß es $\forall x \in A$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ ein $y \in B$ gibt mit $d(y, x) < r + \frac{2}{n}$, bzw. $\forall x \in A \ \forall n \in \mathbb{N} \ d(x, B) < r + \frac{2}{n}$ ist. Dann ist aber $e_1(A, B) = \sup d(x, A) \leq r$.

x A

Aus (1) folgt nun, daß $W_r(A)$ in $\mathcal{O}(\mathcal{T}_i)$ liegt: Zunächst einmal ist $(A; r)' \in \mathcal{O}(\mathcal{T}_i)$; denn, weil $(A; r)'$ abgeschlossen ist, ist nach der Definition von $\mathcal{T}_i$ das von der offenen Menge $[_E((A; r)')]$ erzeugte Mengensystem $\left[[_E((A; r)')]^i\right]_{\mathcal{O}}$ ein Element von $\mathcal{T}_i$, und andererseits die Darstellung

$$(A; r)' \in \mathcal{O} = \mathcal{O} \setminus \left[[_E((A; r)')]^i\right]_{\mathcal{O}}$$

gilt. Außerdem sind alle Mengen $(K(s; r + \frac{1}{n}))^i_{\mathcal{O}}$ des abzählbaren Durchschnitts Elemente von $\mathcal{T}_i$ und somit der Durchschnitt selbst ein Element von $\mathcal{O}(\mathcal{T}_i)$.

Nach der Vorbemerkung ist damit die Behauptung

b) gezeigt.

Δ

Bemerkung: Wir weisen ausdrücklich darauf hin, daß wir das Resultat von (1.3) ohne Voraussetzung an die Menge $\mathcal{O}(E)$ erhalten konnten. Für den Spezialfall $\mathcal{O} = \mathcal{L}(E)$ finden wir einen Beweis der Aussagen von (1.3) z. B. in [16, § 3].

Für spätere Zwecke heben wir noch ein Ergebnis hervor, das sich im Beweis zu (1.3) a) ergab:

(1.4) Korollar: Es mögen die Voraussetzungen von (1.3) a) gelten. Dann gibt es zu jedem $C \in B_{\mathcal{O}}^i$, wobei B offen in E ist, ein $r > 0$, so daß

$$B_{\mathcal{O}}^i \supset \{D \in \mathcal{O}(E); e_1(C, D) < r\} =: V_{r, e_1}^{(1)}(C)$$

gilt.

Beweis:

Im Beweis von (1.3) a) wird von der Relation $e(C,D) < r$ nur $e_1(C,D) < r$ benutzt. Δ

Über den Zusammenhang zwischen $\mathcal{L}_a$ und $\mathcal{L}_m$ gilt der

(1.5) Satz: Es sei E ein metrischer Raum und speziell

$\mathcal{G} = \mathcal{L}(E)$ ($\equiv$ die nichtleeren kompakten Teilmengen von E). Dann ist die Topologie $\mathcal{L}_m$ feiner als die Topologie $\mathcal{L}_a$.

Beweis:

[16] 1. Schritt im Beweis zu 3.1. Δ

Ohne die Voraussetzung $\mathcal{G} = \mathcal{L}(E)$ ist die Aussage von (1.5) falsch. Betrachten wir nämlich das folgende

(1.6) Beispiel: Es sei $E := \mathbb{R}^2$, $\mathcal{G} := \mathcal{F}(E)$ ($\equiv$ die nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen von E).

Für $B := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -e^{-x_1} < x_2 < e^{x_1}\}$ ist $B_a^{\mathcal{G}}$ ein Element von $\mathcal{L}_a$ und $C := \{x = (x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$ liegt in $B_a^{\mathcal{G}}$. Wäre $\mathcal{L}_a \subset \mathcal{L}_m$, so gäbe es ein $r > 0$ mit $V_r(C) \subset B_a^{\mathcal{G}}$, (da $B_a^{\mathcal{G}}$ in $\mathcal{L}_m$ offen sein müßte). Da der gewöhnliche euklidische Abstand zwischen C und B $d(C, B) = 0$ ist, existiert ein $y \in B$, so daß $d(y, C) < r$ ist. Dann kann man sich überlegen, daß die Menge $D := \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha y + (1-\alpha)(-y) \text{ mit } \alpha \in [0, 1]\} \cup C$ in $V_r(C)$ liegt; denn es ist $e_1(D, C) = d(y, C) < r$ und $e_1(C, D) = 0$. Andererseits ist D kein Element von $B_a^{\mathcal{G}}$, d. h. $V_r(C)$ keine Teilmenge von $B_a^{\mathcal{G}}$. Also kann $\mathcal{L}_a$ nicht gröber als $\mathcal{L}_m$ sein.

(1.7) Satz: Es sei E ein metrischer Raum und speziell

$\mathcal{G} = \mathcal{L}(E)$. Dann ist die Exponentialtopologie $\mathcal{L}$ feiner als die metrische Topologie $\mathcal{L}_m$.

Beweis:

Die Behauptung ergibt sich sofort aus [13], Lemma 4.2, wo gezeigt wird, daß die aus $\tau_1 \cup \tau_a$ gebildete Basis eine Basis der Topologie $\mathcal{L}_m$ ist. Δ

Aus (1.3) a), (1.5) und (1.7) folgt:

(1.8) Korollar: Es sei E ein metrischer Raum und speziell $\mathcal{O} = \mathcal{L}(E)$. Dann stimmen die Exponentialtopologie $\mathcal{L}$ und die metrische Topologie $\mathcal{L}_m$ auf $\mathcal{O}$ überein.

Beweis:

folgt sofort aus den oben genannten Sätzen. Δ

Für spätere Überlegungen benötigen wir noch einige Formeln, die sich in den Beweisen zu den Sätzen (1.5) und (1.7) ergeben. Wir formulieren dazu:

(1.9) Korollar: Es sei E ein metrischer Raum und $\mathcal{O} = \mathcal{L}(E)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) Zu jedem $C \in B_{\mathcal{O}}^a$, wobei B offen in E ist, gibt es ein $r > 0$, so daß:

$$B_{\mathcal{O}}^a \supset \{D \in \mathcal{O} ; e_1(D, C) < r\} =: V_{r, e_1}^{(2)}(C)$$

b) Zu jedem $C \in \mathcal{O}$ und jedem $r > 0$ gibt es offene Mengen $B_1, \dots, B_n \subset E$, so daß

$$C \in \bigcap_{j=1}^n (B_j^i \mathcal{O}) \text{ und } \bigcap_{j=1}^n (B_j^i \mathcal{O}) \subset \{D \in \mathcal{O} ; e_1(C, D) < r\}$$

c) Für jedes $C \in \mathcal{O}$ und jedes $r > 0$ gilt:
 $(C; r)_{\mathcal{O}}^a = \{D \in \mathcal{O} : e_1(D, C) < r\}$,
 wobei $(C; r)$ definiert ist also die Menge aller $x \in E$, deren Abstand $d(x, C)$ von C kleiner als r ist.

Beweis:

zu a) Wir setzen $r := d(C, [{}_E B)$. Wegen der Kompaktheit von C , der Abgeschlossenheit von $[{}_E B$ und wegen $C \subset B$ ist $r > 0$. Ist dann $D \in \mathcal{O}_f$ und $e_1(D, C) < r$, so gibt es zu jedem $z \in D$ ein $y \in C$ mit $d(z, y) < r$. Wäre ein $z \in D$ ein Element von $[{}_E B$, so folgte aus der Definition von r , daß $d(z, y) \geq r$ sein müßte. Daher ist $D \subset B$.

zu b) Sei $C \in \mathcal{O}_f = \mathcal{L}(E)$ und $r > 0$. Dann gibt es Punkte $x_1, \dots, x_n \in C$, so daß $C \subset \bigcup_{j=1}^n K(x_j; \frac{r}{2})$. Setzen wir

$B_j := K(x_j; \frac{r}{2})$, so ist $C \in \bigcap_{j=1}^n B_j^i \mathcal{O}_f =: \mathcal{A}$. Jetzt geben wir

uns ein beliebiges $A \in \mathcal{A}$ vor. Für $j = 1, \dots, n$ hat A einen nichtleeren Durchschnitt mit $K(x_j; \frac{r}{2})$. Sei etwa $y_j \in A \cap K(x_j; \frac{r}{2})$ ($j = 1, \dots, n$). Wegen der Dreiecksungleichung existiert für beliebiges $x \in C$ ein j , so daß $d(x, y_j) < r$, woraus $d(x, A) < r$, und da x beliebig aus C ist, $e_1(C, A) < r$ folgt; d. h. auch die 2. Relation in b) ist richtig.

zu c) Ist D eine Teilmenge von $(C; r)$, so ist das gleichbedeutend damit, daß $\forall y \in D$ $d(y; C) < r$ ist, was wegen der Kompaktheit von D äquivalent ist mit $e_1(D, C) < r$.

△

Für die Untersuchung der Meßbarkeit von Korrespondenzen interessieren uns Topologien mit abzählbarer Basis.

(1.10) Satz: Es sei E ein separabler metrischer Raum. Dann ist der metrische Raum $(\mathcal{L}(E), e)$ ebenfalls separabel.

Beweis:

[16] (2.6)

Δ

Daraus ergibt sich mittels unseres Satzes (1.3) das

(1.11) Korollar: Es sei E ein separabler metrischer Raum
und $\mathcal{G} = \mathcal{L}(E)$. Dann ist $\mathcal{A}(\mathcal{T}_1) = \mathcal{A}(\mathcal{L}_m)$.

Beweis:

Nach einem bekannten Satz aus der Topologie bildet das
Mengensystem $\mathcal{M} := \{V_{\frac{1}{n}}(C); C \in \mathcal{H}(S), n \in \mathbb{N}\}$ eine ab-

zählbare Basis für die Topologie $\mathcal{L}_m$. Dabei ist S die nach
Voraussetzung existierende abzählbare Teilmenge von E und
 $\mathcal{H}(S)$ die Menge der nichtleeren endlichen Teilmengen von
 S . Im Beweis zu (1.10) ergibt sich, daß $\mathcal{H}(S)$ die gesuchte
abzählbare dichte Teilmenge von $\mathcal{L}(E)$ ist. Das oben kon-
struierte Mengensystem $\mathcal{M}$ ist ein Erzeuger der σ -Algebra
 $\mathcal{A}(\mathcal{L}_m)$; d. h. $\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \mathcal{A}(\mathcal{L}_m)$. Andererseits ist
 $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}_m$ und daher wegen (1.3) b) $\mathcal{A}(\mathcal{L}_m) \subset \mathcal{A}(\mathcal{T}_1)$. Die
umgekehrte Relation folgt sofort aus (1.3) a).

Δ

Bemerkung: Die Aussage des letzten Korollars finden wir
auch bei Debreu G. in [16] (3.1) bewiesen.
Wir haben den Beweis hier mit Hilfe von (1.3)
geführt, den Debreu in dieser Form nicht zur
Verfügung hat.

Im 2. Teil dieses Paragraphen wollen wir mit Hilfe der be-
sprochenen topologischen Begriffe die Stetigkeit von
Korrespondenzen studieren. Es seien jetzt zwei topologische
Räume (E_1, τ_1) und (E_2, τ_2) , eine nichtleere Teilmenge
 $\mathcal{G}_2 := \mathcal{G}(E_2)$ von $\mathcal{P}_0(E_2)$ und eine Korrespondenz
 $\phi: E_1 \rightarrow \mathcal{G}(E_2)$ vorgegeben.

- (1.12) Definition: a) ϕ heißt nach außen stetig, wenn die Abbildung $\phi: (E_1, \tau_1) \rightarrow (\mathcal{O}(E_2), \mathcal{L}_a)$ stetig ist.
- b) ϕ heißt nach innen stetig, wenn die Abbildung $\phi: (E_1, \tau_1) \rightarrow (\mathcal{O}(E_2), \mathcal{L}_i)$ stetig ist.
- c) ϕ heißt stetig, wenn die Abbildung $\phi: (E_1, \tau_1) \rightarrow (\mathcal{O}(E_2), \mathcal{L})$ stetig ist.
- d) Sind E_1 und E_2 metrisierbar, dann heißt ϕ metrisch stetig, wenn die Abbildung $\phi: E_1 \rightarrow \mathcal{O}(E_2)$ bezüglich der metrischen Räume (E_1, τ_1) und $(\mathcal{O}(E_2), \mathcal{L}_m)$ stetig ist.

Gewöhnlich heißen im Sinn von (1.12) a) bzw. b) nach außen bzw. nach innen stetige Korrespondenzen "oberhalb" bzw. "unterhalb stetig" (vgl. etwa [17]). Aufgrund der in (1.14) und (1.15) gebrachten Kriterien dürfte die hier eingeführte Bezeichnungsweise anschaulicher sein.

- (1.13) Bemerkungen: a) Offensichtlich ist " ϕ stetig" gleichbedeutend mit " ϕ nach außen und nach innen stetig".
- b) Falls $\mathcal{O}(E_2) = \{\{y\}; y \in E_2\}$, so kann man der Korrespondenz $\phi: E_1 \rightarrow \mathcal{O}(E_2)$ eine Funktion $f_\phi: E_1 \rightarrow E_2$ mittels der Vorschrift $\{f_\phi(x)\} = \phi(x)$ zuordnen. Dann gilt:
- 1) ϕ nach außen stetig $\Leftrightarrow \phi$ nach innen stetig $\Leftrightarrow \phi$ stetig $\Leftrightarrow f_\phi$ stetig
 - 2) Falls E_1 und E_2 metrische Räume sind, gilt auch noch:
 ϕ metrisch stetig $\Leftrightarrow f_\phi$ stetig.

Bevor wir die eingeführten Stetigkeitsbegriffe veranschaulichen, bringen wir zwei Sätze von W. Hildenbrand über äquivalente Kriterien für äußere und innere Stetigkeit:

(1.14) Satz: Für eine Korrespondenz $\phi: E_1 \rightarrow \mathcal{Q}(E_2)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) ϕ ist nach außen stetig
- (b) $\forall B \in \mathcal{Z}_2$ liegen die äußeren Urbilder $\phi^a(B)$ ($= \phi^{-1}(B^a \mathcal{Q}_2)$) offen in E_1
- (c) $\forall$ abgeschlossenen Mengen A in E_2 sind die inneren Urbilder $\phi^i(A)$ ($= \phi^{-1}(A^i \mathcal{Q}_2)$) abgeschlossen in E_1
- (d) $\forall x \in E_1$ gilt: Zu jeder Umgebung U von $\phi(x)$ in E_2 (nicht in $\mathcal{Q}(E_2)$!) existiert eine Umgebung V von x in E_1 , so daß $\phi(y) \subset U$ $\forall y \in V$.

Beweis:

W. Hildenbrand definiert in [19] die äußere Stetigkeit mittels (d). In Satz 1 in [19] werden dann die zu unserem Satz entsprechenden Äquivalenzen bewiesen.

Δ

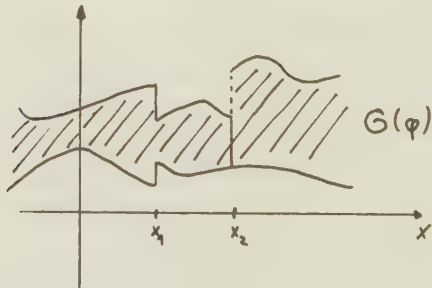
(1.15) Satz: Für eine Korrespondenz $\phi: E_1 \rightarrow \mathcal{Q}(E_2)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) ϕ ist nach innen stetig
- (b) $\forall$ offenen Mengen B in E_2 ist das innere Urbild $\phi^i(B)$ offen in E_1
- (c) $\forall$ abgeschlossenen Mengen A in E_2 ist das äußere Urbild $\phi^a(B)$ abgeschlossen in E_1
- (d) $\forall x \in E_1$ gilt: Zu jedem offenen B in E_2 mit $B \cap \phi(x) \neq \emptyset$ existiert eine Umgebung V von x , so daß $B \cap \phi(y) \neq \emptyset$ $\forall y \in V$.

Beweis:

[19], Satz 4, wobei zu berücksichtigen ist, daß bei W. Hildenbrand die innere Stetigkeit mit Kriterium (d) definiert ist. Δ

- (1.16) Bemerkungen: a) ϕ heißt im Punkt $x \in E_1$ nach außen (bzw. innen) stetig, wenn Kriterium (d) aus (1.14) (bzw. (1.15)) im Punkt x erfüllt ist.
- b) Die Begriffe äußere und innere Stetigkeit macht man sich am besten mittels der Kriterien (d) aus (1.14) bzw. (1.15) klar. Äußere (bzw. innere) Stetigkeit von ϕ bedeutet anschaulich, daß die Mengen $\phi(x)$ in Abhängigkeit von x nicht abrupt "nach außen" aufgebläht werden (bzw. "nach innen" zusammenfallen) dürfen.
- Wir betrachten die Skizze einer Korrespondenz $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}_0(\mathbb{R})$:



ϕ ist in allen Punkten $x \neq x_2$ (bzw. $\neq x_1$) nach außen (bzw. nach innen) stetig. ϕ ist in allen Punkten x , $x \neq x_1$ und $x \neq x_2$, stetig und metrisch stetig.

- c) Wir bringen ein Beispiel einer Korrespondenz ϕ , die nach innen, aber nicht metrisch stetig ist:

Sei $\phi: [0,1] \rightarrow \mathcal{L}(\Phi)$ definiert durch

$$\phi(x) := \begin{cases} \{0\} & , \text{ falls } x \leq 0 \\ [0,1-x], & \text{ falls } x > 0. \end{cases}$$

ϕ ist in 0 nach innen stetig, denn für jede offene Menge U mit $U \cap \phi(0) \neq \emptyset$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset U$ und $\phi(0) \cap]-\varepsilon, \varepsilon[\neq \emptyset$ ist.

Setzen wir $V := [0, \varepsilon[$, so gilt:

$\phi(x) \cap]-\varepsilon, \varepsilon[\neq \emptyset \quad \forall x \in V$, erst recht also:

$\phi(x) \cap U \neq \emptyset \quad \forall x \in V$.

ϕ ist in 0 nicht metrisch stetig, denn für die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert die Mengenfølge $(\phi(\frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich der Hausdorff-Metrik gegen $[0,1]$, während $\phi(0) = \{0\}$ ist.

Als Folgerung aus den letzten beiden Sätzen beweisen wir das

(1.17) Korollar: Für eine Korrespondenz $\phi: E_1 \rightarrow \mathcal{G}(E_2)$ gilt:

- ϕ ist genau dann nach innen stetig, wenn die durch $\bar{\phi}(x) := \overline{\phi(x)}$ definierte Korrespondenz $\bar{\phi}: E_1 \rightarrow \mathcal{G}(E_2)$ nach innen stetig ist.
- Ist E_2 zusätzlich normal, so impliziert die äußere Stetigkeit von ϕ die äußere Stetigkeit von $\bar{\phi}$.

Beweis:

a) Wir benützen das Kriterium (c) aus (1.15). Sei A eine in E_2 abgeschlossene Menge. Dann gilt die Beziehung $\bar{\phi}^a(A) = \phi^a(A)$, woraus sofort die Behauptung folgt.

b) Wir benützen das Kriterium (d) aus (1.14): Es sei x_0 ein Punkt in E_1 und U eine Umgebung von $\bar{\phi}(x)$ in E_2 , die wir wegen der Normalität von E_2 o.B.d.A. als abgeschlossen voraussetzen dürfen. U ist auch Umgebung von $\phi(x_0)$. Es gibt also laut Voraussetzung eine Umgebung V von x_0 in E_1 , so daß $\forall x \in V \ \phi(x) \subset U$. Gäbe es nun für ein $x_1 \in V$ ein $y_1 \in \bar{\phi}(x_1) \cap \bar{U}$, so könnten wir eine Umgebung W von y_1 in E_2 mit $W \subset \bar{U}$ finden. Dieses W hätte aber mit $\phi(x_1)$ nicht-leeren Durchschnitt im Widerspruch zu $y_1 \notin \bar{\phi}(x_1)$.

Δ

In [19] behauptet W. Hildenbrand, daß die Aussage von (1.17) b) auch ohne die Voraussetzung der Normalität von E_2 gilt. Das ist falsch, wie wir mit dem folgenden Beispiel demonstrieren wollen:

(1.18) Beispiel: Es sei $E_1 := E_2 := \mathbb{N}$ und $\tau_1 := \tau_2 := \{ \emptyset \} \cup \{ A \subset \mathbb{N}; 1 \in A \}$. Offensichtlich ist der topologische Raum (E_2, τ_2) nicht normal. Wir betrachten die durch $\phi(n) := \{ n \}$ definierte Korrespondenz $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \{ \{ n \}; n \in \mathbb{N} \}$, die sicher stetig, also insbesondere nach außen stetig ist.

Die Korrespondenz $\bar{\phi}: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{N})$ besitzt die Gestalt:

$$\bar{\phi}(n) = \begin{cases} \mathbb{N} & , n = 1 \\ \{n\} & , n > 1 \end{cases}$$

$\bar{\phi}$ ist in keinem Punkt $n > 1$ nach außen stetig. Sei nämlich $n > 1$, so ist z. B.

$U = \{1, n\}$ eine Umgebung von $\{n\}$ in E_2 .

Andererseits enthält jede Umgebung V von n in E_1 den Punkt 1, d. h. $\bar{\phi}(V) = \mathbb{N} \not\subset U$

$\forall$ Umgebungen V von n .

Jetzt zitieren wir weitere für unsere Anwendung wichtige Resultate aus [19]:

(1.19) Satz: Es sei $\phi: E_1 \rightarrow \mathcal{O}(E_2)$ eine Korrespondenz. Ist E_2 kompakt und der Graph $G(\phi)$ abgeschlossen in der Produkttopologie auf $E_1 \times E_2$, so ist ϕ nach außen stetig.

Beweis:

[19], Folgerung 2 nach Satz 3.

Δ

Die Aussage von (1.19) ist nicht mehr richtig, wenn man die Voraussetzung " E_2 kompakt" durch " $\mathcal{O}(E_2) := \mathcal{L}(E_2)$ " ersetzt.

(1.20) Beispiel: Es liege die Situation von Beispiel (1.18) vor. ϕ sei jetzt definiert durch:

$$\phi(n) := \begin{cases} \{2,3\} & , n = 1 \\ \{n\} & , n > 1 \end{cases}$$

Dann überlegt man sich, daß ϕ kompakte Bilder hat, also $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{N})$. Außerdem ist $G(\phi)$ abgeschlossen im Produktraum $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, denn das Komplement $[\mathbb{N} \times \mathbb{N}] \setminus G(\phi)$ enthält den Punkt $(1,1)$, ist also offen. ϕ ist z. B. im Punkt $n = 2$ nicht nach außen stetig. Das rechnet man analog zu (1.18) nach.

(1.21) Satz: Es seien E_2 normal und $\phi_1, \dots, \phi_n: E_1 \rightarrow \mathcal{F}(E_2)$ nach außen stetige Korrespondenzen, so daß

$\forall x \in E_1 \bigcap_{j=1}^n \phi_j(x) \neq \emptyset$ ist. Dann ist die durch

$\phi(x) := \bigcap_{j=1}^n \phi_j(x)$ definierte Korrespondenz

$\phi: E_1 \rightarrow \mathcal{F}(E_2)$ nach außen stetig.

Beweis:

[19] Folgerung 3 zu Satz 3.

△

In [19] findet man ein Beispiel, daß die Aussage von (1.21) für nach innen stetige Korrespondenzen nicht zu gelten braucht.

(1.22) Satz: Es sei (E_3, τ_3) ein weiterer topologischer Raum. $\phi: E_1 \rightarrow \mathcal{O}(E_2)$ und $\psi: E_1 \rightarrow \mathcal{O}(E_3)$ seien Korrespondenzen. Dann konstruiert man die

Korrespondenz $\phi x \psi: E_1 \rightarrow \mathcal{Q}(E_2 \times E_3)$ durch die
Vorschrift: $(\phi x \psi)(x) := \phi(x) x \psi(x)$.

- a) Sind ϕ und ψ nach innen stetig, so ist
auch $\phi x \psi$ nach innen stetig bezüglich des
Produktraumes $(E_2, \tau_2) \times (E_3, \tau_3)$.
- b) Sind ϕ und ψ nach außen stetig und ist zu-
sätzlich $\mathcal{Q}(E_2) = \mathcal{L}(E_2)$ und $\mathcal{Q}(E_3) = \mathcal{L}(E_3)$,
dann ist auch $\phi x \psi$ nach außen stetig be-
züglich des Produktraumes $(E_2, \tau_2) \times (E_3, \tau_3)$.

Beweis:

a) [19], Satz 2; b) [19], Folgerung 3 zu Satz 4. Δ

Für die Anwendung besonders wichtig ist der nächste Satz:

(1.23) Satz: Gegeben seien eine Korrespondenz $\phi: E_1 \rightarrow \mathcal{Q}(E_2)$
und Funktionen $f: E_1 \times E_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ und $g: E_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Wir
bilden formal die Funktionen:

$s(f, \phi): E_1 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, definiert durch:

$$s(f, \phi)(x) := \sup \{f(x, y); y \in \phi(x)\}$$

$r(g, \phi): E_1 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, definiert durch

$$r(g, \phi)(x) := \sup \{g(y); y \in \phi(x)\}$$

und falls $\mathcal{Q}(E_2) = \mathcal{L}(E_2)$ die Korrespondenz

$\mathcal{S}(f, \phi): E_1 \rightarrow \mathcal{Q}(E_2)$, definiert durch:

$$\mathcal{S}(f, \phi)(x) := \{y \in \phi(x): f(x, y) = s(f, \phi)(x)\}.$$

Dann gelten die Aussagen:

- a) Ist ϕ nach innen stetig und f nach unten halb-
stetig, so ist die Funktion $s(f, \phi)$ nach unten
halbstetig.
- b) Ist ϕ nach außen stetig und g nach oben halb-
stetig, so ist die Funktion $r(g, \phi)$ nach oben
halbstetig.
- c) Ist $\mathcal{Q}(E_2) = \mathcal{L}(E_2)$, ϕ nach außen stetig und
 f nach oben halbstetig, dann ist $s(f, \phi)$ nach
oben halbstetig.

- d) Ist $\mathcal{O}(E_2) = \mathcal{L}(E_2)$, ϕ stetig und f stetig, dann ist die Korrespondenz $\mathcal{C}(f, \phi)$ nach außen stetig.

Beweis:

- a) [19], Satz 5; b) [19], Satz 6'; c) [19], Satz 6;
d) [19], Satz 7. Δ

In (1.23) c) kann man auf die Voraussetzung kompakter Bilder von ϕ nicht verzichten, wie ein weiteres Beispiel in [19] lehrt.

Vielfach findet man in der Literatur eine etwas andere Definition der Stetigkeit nach außen und nach innen, und zwar mittels Folgen, vgl. etwa [4], [14]. Der nächste Satz soll zeigen, wann die Definitionen äquivalent sind. Gleichzeitig liefert er für spätere Zwecke nützliche Kriterien für innere und äußere Stetigkeit:

(1.24) Satz: Es seien (E_1, d_1) und (E_2, d_2) metrische Räume, x_0 ein Punkt aus E_1 und $\phi: E_1 \rightarrow \mathcal{O}(E_2)$ eine Korrespondenz.

Dann gilt:

- a) Ist E_2 kompakt und gilt für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E_1 und für jede gegen ein $y_0 \in E_2$ konvergente Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E_2 mit $y_n \in \phi(x_n)$, daß $y_0 \in \phi(x_0)$, so ist ϕ nach außen stetig im Punkt x_0 .
- b) Ist $\mathcal{O}(E_2) = \mathcal{F}(E_2)$ und ϕ nach außen stetig im Punkt x_0 , so gilt für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und jede gegen ein $y_0 \in E_2$ konvergente Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E_2 mit $y_n \in \phi(x_n)$: $y_0 \in \phi(x_0)$.

- c) ϕ ist genau dann nach innen stetig im Punkt x_0 , wenn es zu jeder gegen x_0 konvergenten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E_1 und zu jedem $y_0 \in \phi(x_0)$ eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E_2 gibt mit $y_n \in \phi(x_n)$ und $y_n \rightarrow y_0$.

Beweis:

a) Wir geben uns eine Umgebung U von $\phi(x_0)$ in E_2 vor, die o.B.d.A. offen sein darf, und nehmen an, daß es in jeder Umgebung V von x_0 ein x gibt, so daß $\phi(x) \cap [U \neq \emptyset$ ist.

Als spezielle V betrachten wir jetzt die offenen Kugeln in E_1 um den Punkt x_0 mit Radius $\frac{1}{n}$, also die Mengen $K_{d_1}(x_0; \frac{1}{n})$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $x_n \in K_{d_1}(x_0; \frac{1}{n})$ mit $\phi(x_n) \cap [U \neq \emptyset$.

Dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E_1 gegen x_0 .

In E_2 konstruieren wir eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, indem wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ $y_n \in \phi(x_n) \cap [U$ wählen.

Da E_2 kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen ein $y_0 \in E_2$ konvergiert.

Also liegt die in der Voraussetzung beschriebene Situation vor: $x_{n_k} \rightarrow x_0$, $y_{n_k} \rightarrow y_0$ und $y_{n_k} \in \phi(x_{n_k})$. Daher liegt

y_0 in $\phi(x_0)$. Der Widerspruch kommt dadurch zustande, daß y_0 als Grenzwert einer Folge im abgeschlossenen $[U$ auch in $[U$ liegen müßte.

b) Es sei (x_n) eine Folge in E_1 , die gegen x_0 konvergiert; außerdem sei (y_n) eine Folge in E_2 , die gegen ein y_0 konvergiert und für die $y_n \in \phi(x_n) \forall n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir schließen indirekt, nehmen also an, y_0 liege nicht in $\phi(x_0)$. Dann existieren Umgebungen U_1 von $\phi(x_0)$ und U_2 von y_0 in E_2 , die disjunkt sind. Wegen 1.14 d) gibt es zu U_1 eine Umgebung V_1 in x_0 , so daß $\forall x \in V_1 \phi(x) \subset U_1$ ist. Daher gibt es weiter ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß $\phi(x_n) \subset U_1 \forall n \geq n_1$.

Betrachten wir die Folge (y_n) , so existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 \geq n_1$, so daß $y_n \in U_2 \forall n \geq n_2$; also gilt wegen $y_n \in \phi(x_n)$: $\phi(x_n) \cap U_2 \neq \emptyset \forall n \geq n_2$ und weiter $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, was nicht möglich ist.

c) 1. Teil: Es sei ϕ in x_0 nach innen stetig:

Wir geben uns eine gegen x_0 konvergente Folge (x_n) in E_1 und ein $y_0 \in \phi(x_0)$ vor. Wenn gezeigt ist, daß die Zahlenfolge $c_n := d(y_0; \phi(x_n))$ gegen 0 konvergiert, dann kann aus jedem $\phi(x_n)$ ein y_n mit

$$d(y_0, y_n) < c_n + \frac{1}{n}$$

gewählt werden, und man erhält so eine gegen y_0 konvergente Folge (y_n) .

Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen $y_0 \in \phi(x_0)$ ist $\phi(x_0) \cap K(y_0; \epsilon) \neq \emptyset$, und damit wegen der inneren Stetigkeit auch $\phi(x_n) \cap K(y_0; \epsilon)$ für genügend großes n . Das bedeutet aber: $c_n < \epsilon$ für genügend großes n bzw. $\lim c_n = 0$.

2. Teil: Wir haben die innere Stetigkeit von ϕ in x_0 zu zeigen. Dazu geben wir uns eine offene Menge U in E_2 vor mit $\phi(x_0) \cap U \neq \emptyset$. Wir schließen indirekt, nehmen also an, zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gebe es ein $x_n \in K_d(x_0; \frac{1}{n})$, so daß $\phi(x_n) \cap U = \emptyset$. Die so entstehende Folge $(x_n)^1$ konvergiert gegen x_0 . Sei y_0 ein Punkt aus $\phi(x_0) \cap U$. Dazu gibt es nach Voraussetzung eine Folge von Punkten $y_n, n \in \mathbb{N}$, in E_2 mit $y_n \in \phi(x_n) \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim y_n = y_0$. Aus der letzten Tatsache folgt die Existenz einer Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\forall n \geq n_0 y_n \in U$, d. h. $\phi(x_n) \cap U \neq \emptyset$ ist.

Unsere Annahme führte also zu einem Widerspruch.

Δ

(1.25) Bemerkung: (1.24) a) ist ohne die Voraussetzung " E_2 kompakt" falsch, wie man an dem folgenden einfachen Beispiel sieht:

Sei $E_1 := [0,1]$, $E_2 := \mathbb{R}$ und

$$\phi(x) := \begin{cases} \{\frac{1}{x}\}, & x \neq 0 \\ \{0\}, & x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt für jede gegen 0 konvergente Folge (x_n) in $[0,1]$ und für jede gegen ein $y_0 \in \mathbb{R}$ konvergente Folge (y_n) mit $y_n \in \phi(x_n)$, daß y_0 in $\phi(0)$ liegt. Jedoch ist ϕ im Punkte 0 nicht nach außen stetig.

Um einen Zusammenhang zwischen der inneren (bzw. äußeren) und der metrischen Stetigkeit zu bekommen, haben wir die Ergebnisse vom Anfang des Paragraphen zu verwenden:

(1.26) Satz: Es seien E_1 und E_2 metrische Räume und $\phi: E_1 \rightarrow \mathcal{G}(E_2)$ eine Korrespondenz. Dann gilt:

a) ϕ metrisch stetig $\Rightarrow \phi$ nach innen stetig

b) Falls $\mathcal{G}(E_2) = \mathcal{L}(E_2): \phi$ metrisch stetig $\Rightarrow \phi$ nach außen stetig.

c) Falls $\mathcal{G}(E_2) = \mathcal{L}(E_2): \phi$ metrisch stetig $\Leftrightarrow \phi$ stetig.

Beweis:

a) folgt aus (1.3) a)

b) folgt aus (1.5)

c) folgt aus (1.8).

Δ

(1.27) Satz: Es seien E_1, E_2 metrische Räume, $\phi: E_1 \rightarrow \mathcal{O}(E_2)$ eine Korrespondenz und x_0 ein Punkt in E_1 .
 Hinreichend für die innere Stetigkeit von ϕ im Punkt x_0 ist, daß für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge $\{e_1(\phi(x_0), \phi(x_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.
 Ist $\phi(x_0)$ präkompakt, dann ist dieses Kriterium auch notwendig.

Beweis:

1) Das Kriterium ist hinreichend: Sei B offen in E_2 und $B \cap \phi(x_0) \neq \emptyset$, d. h. $\phi(x_0) \in B^i \mathcal{O}(E_2)$. Nach (1.4) gibt es dann ein $r > 0$, so daß $V_{r, e_1}^{(1)}(\phi(x_0)) \subset B^i \mathcal{O}(E_2)$. Wäre ϕ in x_0 nicht nach innen stetig, dann gäbe es eine gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in K(x_0; \frac{1}{n})$, so daß $\phi(x_n) \cap B = \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$. Andererseits existiert nach Voraussetzung ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\forall n \geq n_0: \phi(x_n) \in V_{r, e_1}^{(1)}(\phi(x_0)) \subset B^i \mathcal{O}(E_2)$, was gerade heißt: $\phi(x_n) \cap B \neq \emptyset \forall n \geq n_0$.

2) Das Kriterium ist notwendig, wenn $\phi(x_0)$ präkompakt ist: Sei $r > 0$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen x_0 konvergente Folge. Dann gibt es Punkte $z_1, \dots, z_m \in \phi(x_0)$, so daß

$\phi(x_0) \subset \bigcup_{j=1}^m K(z_j; \frac{r}{2})$ ist. Zu jedem z_j existiert infolge

(1.24) c) ein $n_j \in \mathbb{N}$ mit: $d(z_j, \phi(x_n)) < \frac{r}{2} \forall n \geq n_j$.

Durch Anwendung der Dreiecksungleichung erhalten wir dann, daß $\forall n \geq n_0 := \max\{n_j; j = 1, \dots, m\}$ $e_1(\phi(x_0), \phi(x_n)) < r$ ist.

Δ

(1.28) Satz: Es seien die Voraussetzungen von (1.27) erfüllt. Dann gilt: Ist ϕ in x_0 kompakt, so ist notwendig und hinreichend für die äußere Stetigkeit von ϕ in x_0 , daß für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E_1 die Folge $\left\{ e_1(\phi(x_n), \phi(x_0)) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Beweis:

Anwendung von Korollar (1.9) a) und c).

Δ

Später wird noch das folgende Resultat nützlich sein:

(1.29) Satz: Es seien E_1 ein metrischer Raum, E_2 ein kompakter metrischer Raum, der Teilmenge eines lokal-konvexen Hausdorff-Raumes F_2 ist, und $\phi: E_1 \rightarrow \mathcal{L}(E_2)$ eine in einem Punkt $x_0 \in E_1$ nach außen stetige Korrespondenz. Dann gilt für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E_1 :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} h(y'; \phi(x_n)) \geq h(y'; \phi(x_0)) \quad \forall y' \in F_2'.$$

Beweis:

Wir schließen indirekt: Es sei also für ein $y' \in F_2'$

(1) $\liminf_{n \rightarrow \infty} h(y'; \phi(x_n)) < h(y'; \phi(x_0))$; d. h. es gibt eine

Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit

(2) $\lim_{k \rightarrow \infty} h(y'; \phi(x_{n_k})) < h(y'; \phi(x_0)).$

Es gibt zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $y_k \in \phi(x_{n_k})$ mit

(3) $\langle y', y_k \rangle = h(y'; \phi(x_{n_k})).$

Wegen der Kompaktheit von E_2 existiert ein $y_0 \in E_2$ und eine Teilfolge $(k_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$, so daß $(y_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$ gegen y_0 konvergiert. Wegen der äußeren Stetigkeit von ϕ liegt dann y_0 in $\phi(x_0)$; d. h.

$$(4) \langle y', y_0 \rangle \geq h(y'; \phi(x_0)).$$

Andererseits ergibt sich aus (2) und (3):

$$\begin{aligned} \langle y', y_0 \rangle &= \lim_{m \rightarrow \infty} \langle y', y_{k_m} \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} h(y'; \phi(x_{n_{k_m}})) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} h(y'; \phi(x_{n_k})) < h(y'; \phi(x_0)), \end{aligned}$$

also ein Widerspruch.

Δ

Zum Abschluß dieses Paragraphen führen wir einen Fixpunktsatz für Korrespondenzen an, der in der Gleichgewichtsanalyse eine zentrale Rolle spielen wird:

(1.30) Satz: Es seien E ein lokalkonvexer Hausdorff-Raum, K eine nichtleere kompakte konvexe Teilmenge von E und $S:K \rightarrow \mathcal{F}_c(K)$ eine nach außen stetige Korrespondenz.

Dann existiert ein $\bar{u} \in K$, so daß $\bar{u} \in S(\bar{u})$.

Beweis:

[12], Theorem 4.

Δ

§ 2: Die Meßbarkeit von Korrespondenzen

Es seien ein Meßraum $(W, \mathfrak{A})$, ein topologischer Raum (E, τ) und eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(E)$ von $\mathcal{P}_0(E)$ vorgelegt. Wir führen in diesem Paragraphen verschiedene Meßbarkeitsbegriffe für Korrespondenzen von W nach $\mathcal{Q}$ ein, bringen Meßbarkeitskriterien und studieren die Zusammenhänge zwischen den Meßbarkeitsbegriffen. Im letzten Teil des Paragraphen gehen wir kurz auf die Konstruktion meßbarer Auswahlfunktionen ein.

$\mathcal{T}$ sei eine beliebige Topologie auf $\mathcal{Q}$; meist wird

$\mathcal{T} = \mathcal{T}_i, \mathcal{T}_a, \mathcal{T}$ oder falls (E, τ) metrisierbar ist, auch $\mathcal{T}_m$ sein.

A. Verschiedene Meßbarkeitskriterien

(2.1) Definition: Es sei $\phi: W \rightarrow \mathcal{Q}(E)$ eine Korrespondenz.

Dann sagen wir:

- a) ϕ heißt meßbar, wenn die Abbildung $\phi: (W, \mathfrak{A}) \rightarrow (\mathcal{Q}(E), \mathcal{L}(\mathcal{T}))$ meßbar ist, d.h. wenn für alle $S \in \mathcal{L}(\mathcal{T})$ $\phi^{-1}(S) \in \mathfrak{A}$ ist.
- b) ϕ heißt nach innen meßbar, wenn für alle abgeschlossenen Teilmengen B von E das innere Urbild $\phi^i(B)$ in $\mathfrak{A}$ liegt.
- c) ϕ heißt nach außen meßbar, wenn für alle abgeschlossenen Teilmengen B von E das äußere Urbild $\phi^a(B)$ in $\mathfrak{A}$ liegt.
- d) ϕ heißt Au-meßbar, wenn der Graph $G(\phi)$ von ϕ in $\mathfrak{A} \otimes \mathcal{L}(\tau)$ liegt.

Sind E und F lineare Räume, die bezüglich einer Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $F \times E$

ein duales Paar $\langle F, E \rangle$ bilden, so sagen wir:
e) ϕ heißt Ri-meßbar (bezüglich $\langle F, E \rangle$),
wenn $\forall x' \in F$ die Stützfunktion
 $h(x'; (\cdot)): W \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{R}$ -meßbar ist.

- (2.2) Bemerkungen:
- a) In der Literatur heißen oft nach innen (nach außen) meßbare Korrespondenzen "schwach" ("stark") meßbar. Wir führen hier die neuen Bezeichnungen ein, um die Analogie zu den in § 1 diskutierten Stetigkeitsbegriffen zu unterstreichen.
 - b) Auch die Bezeichnungen "Au-meßbar" und "Ri-meßbar" gibt es noch nicht in der Literatur. Wir wollen mit dieser Bezeichnungsweise daran erinnern, daß der mit "Au-meßbar" bezeichnete Meßbarkeitsbegriff ausführlich von R. J. Aumann diskutiert wird (vgl. etwa [3], [4], [5]), während in Arbeiten von H. Richter (etwa [32]) und im Anschluß daran von R. Wegmann, [35], die Meßbarkeit von Korrespondenzen mittels des mit "Ri-meßbar" bezeichneten Begriffs studiert wird.
 - c) Der in (2.1) a) definierte Meßbarkeitsbegriff ist eine naheliegende Ausdehnung der Meßbarkeit von Abbildungen. Für praktische Zwecke wird sich dieser Begriff nicht als besonders nützlich herausstellen. Doch ist es vom theoretischen Standpunkt her gut zu wissen, ob und wann die übrigen Meßbarkeitsbegriffe mit diesem von der Auffassung einer Korrespondenz als Abbildung herrührenden Begriff übereinstimmen.

Mit den nächsten Beispielen wollen wir demonstrieren, daß zwischen den eingeführten Meßbarkeitskriterien durchaus Unterschiede bestehen können:

(2.3) Beispiele: a) Wir setzen $W := E := \mathbb{N}$, $\mathcal{A} := \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ und $\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{N}; 1 \in A\}$ (vgl. (1.18)). Dann ist die Korrespondenz $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ mit $\phi(n) = \{1, \dots, n\}$ nach außen meßbar, denn für alle abgeschlossenen Mengen B in $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$, d. h. für alle $B \subset \mathbb{N}$ mit $1 \notin B$, ist $\phi^a(B) = \emptyset$. Dagegen ist ϕ nicht nach innen meßbar, da z. B. für $B = \{3\}$ $\phi^i(B) = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, und somit nicht zu $\mathcal{A}$ gehört.

b) Es sei $W := [0, 1]$ und $\mathcal{A} := \{K \subset W; K \text{ abzählbar oder } [{}_W K \text{ abzählbar}]\}$. Als E wählen wir $L_{\mathbb{R}}^{\infty}([0, 1], \mathcal{L} \cap [0, 1], \lambda|_{[0, 1]})$. Die Topologie $\mathcal{T}$ auf E sei die zu dem dualen Paar $\langle L_{\mathbb{R}}^1(\quad), L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\quad) \rangle$ gehörende schwache Topologie $\mathcal{G}(L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\quad), L_{\mathbb{R}}^1(\quad))$. Wir definieren eine Korrespondenz $\phi: W \rightarrow \mathcal{G}(E)$ durch $\phi(w) := \{x \in E; x \geq 0, x(t) = 0 \text{ für } t > w\}$. ϕ ist Ri-meßbar: dazu berechnen wir die Stützfunktion:

$$\begin{aligned} h(x'; \phi(w)) &= \inf_{x \in \phi(w)} \int_0^1 x'(t)x(t)d\lambda = \\ &= \inf_{x \in \phi(w)} \int_0^w x'(t)x(t)d\lambda, \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } h(x'; \phi(w)) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x' \geq 0 \\ -\infty, & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall w \in [0, 1]$$

Dagegen ist ϕ nicht nach innen meßbar: Es sei B etwa die einpunktige, also abgeschlossene Menge $\{1_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]}\}$. Das zugehörige innere Urbild

$$\phi^{\downarrow}(B) = \{w \in [0,1]; 1_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \in \phi(w)\} = [\frac{3}{4}, 1]$$

liegt nicht in $\mathcal{A}$.

Jetzt wollen wir in möglichst allgemeinem Rahmen die Zusammenhänge zwischen den Meßbarkeitskriterien untersuchen. Zuerst soll ein Zusammenhang zwischen der Au-Meßbarkeit und der Meßbarkeit nach innen (bzw. außen) hergestellt werden: Das erste Resultat bereiten wir durch einige Lemmata vor:

(2.4) Lemma: Es mögen die Obervoraussetzungen dieses Paragraphen gelten und es sei $\mathcal{G}(E) = \mathcal{P}_0(E)$. Ist $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge Au-meßbarer Korrespondenzen $\phi_n: W \rightarrow \mathcal{G}(E)$, so daß $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi_n(w) \neq \emptyset$ $\forall w \in W$, dann ist die durch $\phi(w) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi_n(w)$ definierte Korrespondenz $\phi: W \rightarrow \mathcal{G}(E)$ ebenfalls Au-meßbar.

Beweis:

Die Behauptung folgt sofort aus der Voraussetzung und der Mengenidentität:

$$\begin{aligned} G(\phi) &= \{(w,x) \in W \times E; x \in \phi(w)\} = \{(w,x) \in W \times E; x \in \phi_n(w) \forall n \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{(w,x) \in W \times E; x \in \phi_n(w)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G(\phi_n). \end{aligned}$$

Δ

(2.5) Lemma: Es seien (E, τ) und (F, τ') separable metrische Räume. Außerdem sei eine Abbildung $f: W \times E \rightarrow F$ mit den folgenden Eigenschaften gegeben:

- (i) $\forall x \in E$ ist die Abbildung $W \ni w \rightarrow f(w,x) \in F$ $\mathcal{A} - \mathcal{L}(\tau')$ - meßbar.

(ii) $\forall w \in W$ ist die Abbildung $E \ni x \rightarrow f(w, x) \in F$
 $\mathbb{R} - \mathbb{R}'$ - stetig.

Dann ist $f: \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}')$ - meßbar.

Beweis:

folgt aus Lemma 3.1. in [13].

Δ

(2.6) Lemma: Es sei (E, d) ein metrischer Raum und $\phi: W \rightarrow \mathcal{P}_0(E)$
 eine nach innen bzw. außen meßbare Korrespondenz.

Dann ist für jedes $x \in E$ die Funktion

$W \ni w \rightarrow d(x; \phi(w)) \in \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$ -meßbar.

Beweis:

Es sei c eine reelle Zahl. Dann gilt im Fall der inneren
 Meßbarkeit:

$$\begin{aligned} \{w \in W: d(x; \phi(w)) < c\} &= \{w \in W: \phi(w) \cap K_d(x; c) \neq \emptyset\} = \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{w \in W: \phi(w) \cap K'_d(x; c - \frac{1}{n}) \neq \emptyset\} = \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi^{-1}(K'_d(x; c - \frac{1}{n})). \end{aligned}$$

Die letzte Menge ist abzählbare Vereinigung von nach Voraus-
 setzung zu $\mathcal{A}$ gehörenden Mengen, liegt also selbst in $\mathcal{A}$;
 d. h. $d(x; \phi(\cdot))$ ist $\mathcal{A}$ -meßbar.

Im Fall der äußeren Meßbarkeit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \{w \in W: d(x; \phi(w)) \geq c\} &= \{w \in W: \phi(w) \cap K(x; c) = \emptyset\} = \\ &= \{w \in W: \phi(w) \subset \complement_E K(x; c)\} = \phi^a(\complement_E K(x; c)), \end{aligned}$$

woraus aufgrund der Voraussetzung unmittelbar die $\mathcal{A}$ -Meßbar-
 keit von $d(x; \phi(\cdot))$ folgt.

Δ

Damit kommen wir zu

(2.7) Satz: Ist (E, d) ein separabler metrischer Raum, so
 folgt aus der inneren bzw. äußeren Meßbarkeit
 einer Korrespondenz $\phi: W \rightarrow \mathcal{P}_0(E)$ die Au-Meß-
 barkeit der zugehörigen Korrespondenz $\bar{\phi}: W \rightarrow \mathcal{F}(E)$
 mit $\bar{\phi}(w) := \overline{\phi(w)}$.

Beweis:

Setzen wir in (2.5) $F = \mathbb{N}$ und $f(w, x) = d(x; \phi(w))$, dann folgt aus (2.6), daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Korrespondenzen $\phi_n: W \rightarrow \mathcal{P}_0(E)$ mit $\phi_n(w) = \{x \in E: d(x; \phi(w)) < \frac{1}{n}\}$ Au-meßbar sind, denn es gilt:

$$G(\phi_n) = \{(w, x) \in W \times E: d(x; \phi(w)) < \frac{1}{n}\}.$$

Wegen $\bar{\phi} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi_n$ ergibt sich nun unter Berücksichtigung von (2.4) die Behauptung. Δ

Wir können unter einer zusätzlichen Voraussetzung diesen Satz umkehren:

(2.8) Satz: Es sei $(W, \mathcal{A}, m)$ ein Maßraum, $\mathcal{A}_m$ die Vervollständigung von $\mathcal{A}$ bezüglich m und E ein vollständiger separabler metrischer Raum. Dann ist jede bezüglich $\mathcal{A}_m$ Au-meßbare Korrespondenz $\phi: W \rightarrow \mathcal{P}_0(E)$ nach innen meßbar bezüglich $\mathcal{A}_m$.

Beweis:

[13], Lemma 3.2 Δ

Jetzt untersuchen wir, wie die äußere und die innere Meßbarkeit zusammenhängen.

(2.9) Satz: Es sei E ein metrischer Raum, $(W, \mathcal{A}, m)$ ein Maßraum und $\phi: W \rightarrow \mathcal{P}_0(E)$ eine Korrespondenz.

- a) Ist ϕ nach innen meßbar, so ist es auch nach außen meßbar.
- b) Ist ϕ nach außen meßbar bezüglich $\mathcal{A}_m$ und E zusätzlich vollständig und separabel, so ist $\bar{\phi}$ nach innen meßbar bezüglich $\mathcal{A}_m$.

Beweis:

a) Wir betrachten eine abgeschlossene Menge B in E . Dann gibt es eine abzählbare Familie $(B_j)_{j \in I}$ von abgeschlossenen Mengen in E , derart daß ${}_E B = \bigcup_{j \in I} B_j$. Die Be-

hauptung von a) folgt dann aus der Mengengleichheit:

$$\phi^a(B) = {}_W \phi^i({}_E B) = {}_W \bigcup_{j \in I} \phi^i(B_j)$$

b) folgt aus (2.7) und (2.8).

Δ

Bemerkung: In [21], Theorem 1, ist das Ergebnis von (2.8) für den Fall eines lokalkompakten W bewiesen.

Der folgende Satz bringt nützliche Kriterien für innere und äußere Meßbarkeit.

(2.10) Satz: Es sei (E, τ) ein vollständiger separabler metrischer Raum und $\phi: W \rightarrow \mathcal{P}_o(E)$ eine Korrespondenz.

Zwischen den folgenden Bedingungen

(a) ϕ ist nach außen meßbar bezüglich $\mathcal{A}_m$

(b) $\bar{\phi}$ ist nach außen meßbar bezüglich $\mathcal{A}_m$

(c) $\phi^a(0) \in \mathcal{A}_m \quad \forall 0 \in \tau$

(d) ϕ ist nach innen meßbar bezüglich $\mathcal{A}_m$

(e) $\bar{\phi}$ ist nach innen meßbar bezüglich $\mathcal{A}_m$

(f) $\phi^i(0) \in \mathcal{A}_m \quad \forall 0 \in \tau$

(g) Für jedes $x \in E$ ist die Funktion

$$W \ni w \rightarrow d(x; \phi(w)) \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{A}_m$ -meßbar

gelten die Äquivalenzbeziehungen:

(a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (e) $\Leftrightarrow$ (g), (c) $\Leftrightarrow$ (d),

sowie die Implikationen:

(d) $\Rightarrow$ (e), (d) $\Rightarrow$ (f) und (f) $\Rightarrow$ (a).

Beweis: "(a) $\Leftrightarrow$ (b)" folgt aus der für alle abgeschlossenen $B \subset E$ gültigen Relation: $\phi^a(B) = \bar{\phi}^a(B)$.

"(b) $\Leftrightarrow$ (e)" folgt aus (2.9).

Von der Äquivalenz "(e) $\Leftrightarrow$ (g)" ist wegen (2.6) nur die Richtung "(g) $\Rightarrow$ (e)" zu zeigen: Es ist $\bar{\phi} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi_n$, wobei

$\phi_n: W \rightarrow \mathcal{P}_0(E)$ durch $\phi_n(w) := \{x \in W: d(x; \phi(w)) < \frac{1}{n}\}$ gegeben ist. Wie im Beweis zu (2.7) sieht man, daß jedes ϕ_n , und damit $\bar{\phi}$ Au-meßbar ist. Also ist nach (2.8) $\bar{\phi}$ nach innen meßbar.

"(c) $\Leftrightarrow$ (d)" ergibt sich aus

$$(1) \phi^i(A) = \bigcap_W \phi^a(\bigcap_E A)$$

$$\forall A \subset E$$

$$(2) \phi^a(A) = \bigcap_W \phi^i(\bigcap_E A)$$

"(d) $\Rightarrow$ (e)" folgt aus (2.9) a) und der Äquivalenz

"(a) $\Leftrightarrow$ (e)".

"(d) $\Rightarrow$ (f)" ergibt sich daraus, daß es für jede offene Menge O im metrischen Raum E eine Darstellung

$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ mit geeigneten abgeschlossenen Mengen B_n gibt;

somit ist

$$\phi^i(O) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi^i(B_n) \in \mathcal{D}_m.$$

"(f) $\Rightarrow$ (a)" folgt aus (2).

Δ

Als nächstes stellen wir Zusammenhänge zur R_i -Meßbarkeit her.

(2.11) Satz: Es seien E und F lineare Räume, die vermöge der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein duales Paar $\langle F, E \rangle$ bilden. Ist dann eine Korrespondenz $\phi: W \rightarrow \mathcal{Q}(E)$ nach außen meßbar bezüglich $\mathcal{K}$, so ist sie auch R_i -meßbar bezüglich $\langle F, E \rangle$.

Beweis:

Der in [16], (5.8), gebrachte Beweis für den Fall $\mathcal{Q}(E) = \mathcal{L}(E)$ kann wörtlich auf den allgemeinen Fall übertragen werden.

Δ

Bevor wir die Umkehrung von (2.11) beweisen können, bringen wir zwei Lemmata, wobei das erste ein wichtiges und von uns in dieser Arbeit noch oft verwendetes Resultat aus [10] ist:

(2.12) Lemma: Es sei E ein topologischer Vektorraum, H eine nichtleere konvexe offene Menge in E und f eine endlichwertige konvexe (bzw. konkave) Funktion von H nach $\mathbb{R}$.
 f ist genau dann stetig auf ganz H , wenn es eine nichtleere offene Menge $U \subset H$ gibt, so daß $f|U$ nach oben (bzw. nach unten) beschränkt ist.

Beweis:

[10], chap. II, § 5, Nr. 2, Prop. 2.

Δ

(2.13) Lemma: Es seien E und F lineare Räume, die vermöge der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein duales Paar $\langle F, E \rangle$ bilden. Auf F gebe es eine bezüglich $\langle F, E \rangle$ zulässige Topologie τ_F , so daß in F eine abzählbare bezüglich τ_F dichte Teilmenge F_0 existiert.

Dann gilt für jede τ_F -gleichstetige konvexe Menge $G \subset E$:

$$\bar{G} = \bigcup_{x' \in F_0} \{x \in E: \langle x', x \rangle \geq h(x'; G)\}.$$

Beweis:

folgt aus [13], Theoreme 6.1.

Δ

Jetzt können wir die Umkehrung von (2.11) beweisen:

(2.14) Satz: Es seien E und F lineare Räume, die vermöge der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein duales Paar $\langle F, E \rangle$ bilden. Auf F gebe es eine bezüglich $\langle F, E \rangle$ zulässige lokalkonvexe Hausdorff-Topologie τ_F , so daß in F eine abzählbare bezüglich τ_F dichte Teilmenge F_0 existiert. τ_E sei eine bezüglich $\langle F, E \rangle$ zulässige Topologie auf E . Dann ist jede bezüglich $\langle F, E \rangle$ Ri-meßbare Korrespondenz $\phi: W \rightarrow \{G \in \mathcal{F}_c(E): G \text{ } \tau_F\text{-gleichstetig}\}$ $\mathcal{A}$ -meßbar bezüglich $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L}(\tau_E)$.

Beweis:

Es sei $F_0 = \{x'_1, x'_2, \dots\}$. Wir definieren eine Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$

von Korrespondenzen $\phi_n: W \rightarrow \mathcal{F}_c(E)$ durch:

$$\phi_n(w) := \{x \in E: \langle x'_n, x \rangle \geq h(x'_n; \phi(w))\}.$$

Nun sind die Funktionen $\langle x'_n, \cdot \rangle$ und $h(x'_n; \phi(\cdot))$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L}(\tau_E)$ -meßbar, woraus die Au-Meßbarkeit der ϕ_n folgt. Wegen

$$(2.13) \text{ ist } \phi = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi_n, \text{ und so ist nach (2.4) } \phi \text{ Au-meßbar.}$$

Δ

(2.15) Korollar: Es seien die Voraussetzungen aus (2.14) erfüllt. Außerdem gebe es auf E eine Topologie τ_E (die nicht notwendig linear zu sein braucht), so daß (E, τ_E) ein vollständiger separabler metrischer Raum und τ_E feiner als $\mathcal{A}(E, F)$ ist. Dann folgt aus der Ri-Meßbarkeit bezüglich $\langle F, E \rangle$ einer Korrespondenz $\phi: W \rightarrow \{G \in \mathcal{F}_c(E); G \tau_F\text{-gleichstetig}\}$ die Meßbarkeit nach außen bezüglich $\mathcal{A}_m$.

Beweis:

Nach (2.14) mit $\tau_E = \mathcal{A}(E, F)$ ist $G(\phi) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}(\mathcal{A}(E, F))$, also sicher auch $G(\phi) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}(\tau_E)$. Die Behauptung folgt dann aus (2.8) und (2.9).

Δ

(2.16) Bemerkung: Die Voraussetzungen in (2.15) sind z. B. erfüllt, wenn F ein separabler metrisierbarer lokalkonvexer Raum und $E := F'$ ist. Dann gibt es nämlich in F eine abzählbare Nullumgebungsbasis $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\}$, so daß $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n^0$ und jedes U_n^0 $\mathcal{A}(E, F)$ -kompakt und daher in $\mathcal{A}(E, F)$ metrisierbar, separabel und vollständig ist. (Vgl. etwa [23], § 21, 3(4)). Somit ist jedes U_n^0 ausgestattet mit der Spurtopologie $\mathcal{A}(E, F) \cap U_n^0$ ein polnischer Raum. Als τ_E kann man dann die Summe der Topo-

logien $\mathcal{G}(E, F) \cap U_n^0$, $n \in \mathbb{N}$, wählen, wodurch (E, γ_E) ein polnischer Raum ist, d. h. die gewünschten Eigenschaften: metrisierbar, separabel und vollständig, besitzt.

Da für jedes $B \in \mathcal{G}(E, F)$

$$B = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n^0 \right) \cap B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (U_n^0 \cap B), \text{ und}$$

$U_n^0 \cap B \in \mathcal{G}(E, F) \cap U_n^0$, gilt, ist auch

γ_E feiner als $\mathcal{G}(E, F)$.

Im nächsten Satz untersuchen wir den Begriff der allgemeinen Meßbarkeit einer Korrespondenz, (vgl. (2.1) a)).

(2.17) Satz: Es sei $(W, \mathcal{A})$ ein Meßraum, (E, τ) ein beliebiger topologischer Raum und $\phi: W \rightarrow \mathcal{O}(E)$ eine Korrespondenz.

- Ist $\mathcal{T} = \mathcal{L}_a$ oder $\mathcal{L}$ und ϕ $\mathcal{A} - \mathcal{L}(\mathcal{T})$ -meßbar, dann ist ϕ nach innen meßbar.
- Ist $\mathcal{T} = \mathcal{L}_i$ oder $\mathcal{L}$ und ϕ $\mathcal{A} - \mathcal{L}(\mathcal{T})$ -meßbar, dann ist ϕ nach außen meßbar.
- Ist E metrischer Raum, $\mathcal{T} = \mathcal{L}_m$ und ϕ $\mathcal{A} - \mathcal{L}(\mathcal{T})$ -meßbar, dann ist ϕ nach außen meßbar.
- Ist E separabler metrischer Raum, $\mathcal{O}(E) = \mathcal{L}(E)$ und ϕ nach innen meßbar, dann ist ϕ $\mathcal{A} - \mathcal{L}(\mathcal{T})$ -meßbar für $\mathcal{T} = \mathcal{L}_i, \mathcal{L}_a, \mathcal{L}$ oder $\mathcal{L}_m$.

Beweis:

a) und b) folgen daraus, daß $B_{\mathcal{O}}^i$ bzw. $B_{\mathcal{O}}^a$ für jede abgeschlossene Menge B in E bezüglich $\mathcal{L}_a$ bzw. $\mathcal{L}_i$ und damit bezüglich $\mathcal{L}$ abgeschlossen ist.

c) Wegen (1.3) ist $\mathcal{L}(\mathcal{L}_i) \subset \mathcal{L}(\mathcal{L}_m)$. Man verwende dann Teil b).

d) Nach (1.11) ist $\mathcal{A}(\gamma_i) = \mathcal{L}(\mathcal{L}_m)$. Sei zuerst $\mathcal{T} = \mathcal{L}_m$.

Die Mengen $B^i_{\mathcal{G}}$ mit $B \in \mathcal{F}$ bilden $\mathcal{Y}_i$. Nach Voraussetzung und (2.9) ist $\phi^{-1}(B^i_{\mathcal{G}}) = \phi^i(B) \in \mathcal{A}$. Damit ist ϕ $\mathcal{A} - \mathcal{L}(\mathcal{L}_m)$ -meßbar.

Für $\mathcal{T} = \mathcal{L}_i$ berücksichtigen wir die Beziehung $\mathcal{L}(\mathcal{L}_i) = \mathcal{L}(\mathcal{L}_m)$, womit bereits die $\mathcal{A} - \mathcal{L}(\mathcal{L}_i)$ -Meßbarkeit von ϕ gezeigt ist.

Für $\mathcal{T} = \mathcal{L}_a$ oder $\mathcal{L}$ liefert uns (1.5) bzw. (1.7) die Behauptung.

Δ

B. Meßbare Auswahlfunktionen

Ein wichtiger Punkt bei dem Studium von Korrespondenzen ist die Frage nach der Existenz meßbarer Auswahlfunktionen meßbarer Korrespondenzen. Aus der reichhaltigen Literatur über diesen Problemkreis (vgl. z. B. [28]) zitieren wir nur einige für unsere Anwendungen relevante Ergebnisse. Zunächst definieren wir:

(2.18) Definition: Gegeben seien zwei Mengen A und B und eine Korrespondenz $\phi: A \rightarrow \mathcal{G}(B)$. Dann heißt eine Funktion $f: A \rightarrow B$ mit $f(a) \in \phi(a) \quad \forall a \in A$ eine Auswahlfunktion von ϕ .

Der allgemeinste Satz über die Existenz meßbarer Auswahl-funktionen dürfte das "Measurable Choice Theorem" von R.J.Aumann aus [5] sein:

(2.19) Satz: Es sei $(W, \mathcal{A}, m)$ ein σ -endlicher Maßraum, $(E, \mathcal{L})$ ein "Standard-Meßraum" (d.h. es existiert eine Bijektion $g: E \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, die meßbare Mengen in beiden Richtungen erhält) und $G \subset W \times E$ mit

- (i) $G \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$
- (ii) $\text{pr}_W(G) = W$.

Dann gibt es eine $\mathcal{A} - \mathcal{L}$ -meßbare Funktion $f: W \rightarrow E$, so daß $(w, f(w)) \in G$ für m -fast alle $w \in W$.

Beweis:

[5], pp. 17 - 19

Δ

(2.20) Korollar: Es sei $(W, \mathcal{A}, m)$ ein σ -endlicher Maßraum, $(E, \mathcal{T})$ ein überabzählbarer polnischer Raum und $\phi: W \rightarrow \mathcal{O}_f(E)$ eine $\mathcal{A}$ -meßbare Korrespondenz. Dann existiert eine $\mathcal{A} - \mathcal{L}(\mathcal{T})$ -meßbare " m -fast"-Auswahlfunktion f von ϕ (d.h. $f(w) \in \phi(w)$ für m -fast alle $w \in W$).

Beweis:

Man kann zeigen, daß jeder überabzählbare polnische Raum ein Standard-Maßraum ist, siehe [5], p. 17. Setzen wir in (2.19) $G := G(\phi)$, so erfüllt G offensichtlich (i) und (ii); die Behauptung folgt also aus (2.19).

Δ

Kennt man von einer Korrespondenz nur die $\mathcal{R}_i$ -Meßbarkeit und ist (2.14) nicht anwendbar, so lassen sich unter geeigneten Separabilitätsvoraussetzungen über den Dualraum und Stetigkeitsforderungen für die Stützfunktionen mit Hilfe der in [32] und [35] dargestellten Ergebnisse über die "Ecken" meßbare Auswahlfunktionen konstruieren. Zunächst definieren wir mit R. Wegmann, [35], § 3.

(2.21) Definition: Die linearen Räume E und F mögen bezüglich einer Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein duales Paar $\langle F, E \rangle$ bilden. I sei eine beliebige (durch eine Relation) wohlgeordnete Menge und $A := (a_i')_{i \in I}$ eine Familie von Elementen aus F .

- a) Wir setzen für Elemente $x, y \in E$ $x <^A y$ genau dann, wenn entweder:
- $$\langle a'_i, x \rangle = \langle a'_i, y \rangle \quad \forall i \in I$$
- oder: $\langle a'_i, x \rangle < \langle a'_i, y \rangle$ für den kleinsten Index i mit $\langle a'_i, x \rangle \neq \langle a'_i, y \rangle$.
- b) Für eine abgeschlossene konvexe Teilmenge K von E heißt die Menge $K_A :=$
- $$= \{x \in K : x <^A y \quad \forall y \in K\}$$
- die A-Randmenge von K .
- c) Die Elemente von K_A heißen A-minimal.
- d) Falls K_A einpunktig ist, so heißt dieser Punkt eine Ecke von K oder genauer: die A-Ecke von K .

Das folgende Lemma beantwortet die Frage, wann K_A nichtleer ist und wann es genau aus einem Punkt besteht.

(2.22) Lemma: Es sei i_0 das kleinste Element der Menge I , der Indexmenge der Familie $A = (a'_i)_{i \in I}$. K sei ein Element von $\mathcal{K}_c(E)$, derart daß $h(\cdot; K)$ im Punkt a'_{i_0} endlichwertig und stetig ist. Dann ist die A-Randmenge K_A von K nichtleer.

Ist überdies A total (d. h. $\langle a'_i, x \rangle = 0 \quad \forall i \in I$ dann und nur dann, wenn $x = 0$), so besteht K_A genau aus einem Punkt.

Beweis:

Der 1. Teil der Behauptung ist (3.3) aus [35]. Der 2. Teil folgt aus der Totalität der Menge A unmittelbar.

△

Mit diesem Hilfssatz erhalten wir den folgenden Auswahlssatz:

- (2.23) Satz: Es seien $(W, \mathcal{A}, m)$ ein $\mathcal{C}$ -finiter Maßraum, E und F lineare Räume, die vermöge der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein duales Paar $\langle F, E \rangle$ bilden, und F bezüglich einer lokalkonvexen Hausdorff-Topologie τ_F , die bezüglich des dualen Paares $\langle F, E \rangle$ zulässig ist, separabel. Erfüllt dann eine Korrespondenz $\phi: W \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(E)$ die folgenden Voraussetzungen:
- (i) ϕ ist $\mathcal{R}_1$ -meßbar.
 - (ii) Zu jedem $w \in W$ gibt es einen Punkt $x'(w) \in F$, so daß $h(\cdot; \phi(w))$ in $x'(w)$ endlichwertig und stetig ist.
 - (iii) Es existiert in F eine τ_F -offene Menge $U \neq \emptyset$, so daß es zu jedem $x' \in U$ eine m -Nullmenge $N(x') \in \mathcal{A}$ gibt mit
$$h(x'; \phi(w)) > -\infty \quad \forall w \in W \setminus N(x'),$$
 so existiert eine $\mathcal{A}$ - $\mathcal{L}(\mathcal{C}(E, F))$ -meßbare m -fast-Auswahlfunktion f von ϕ . Die Funktion f liefert für m -fast alle $w \in W$ eine Ecke von $\phi(w)$.

Beweis:

[35], Beweis zu (4.1), Teil 1) und erster Abschnitt von Teil 2).

△

- (2.24) Bemerkungen: a) Die Voraussetzung (iii) ist z. B. dann erfüllt, wenn $h(x'; \phi(\cdot)) \forall x' \in U$ m -integrierbar.
- b) Die Aussage von (2.23) kann trotz der auf den ersten Blick einschränkenden Voraussetzungen (i)...(iii) nicht aus dem Aumannschen Resultat (2.20) erhalten werden. So ist (2.23) z. B. auf

die Korrespondenz ϕ aus Beispiel (2.3) b) anwendbar, während (2.20) nicht angewendet werden kann, da ϕ auch nicht A -meßbar ist, wie man sich überlegen kann. Die Funktion $f: W \rightarrow L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\cdot)$ definiert durch $f(w) \equiv 0$ ist eine meßbare Auswahlfunktion von ϕ . Für jede Familie $A \subset L_{\mathbb{R}}^1(\cdot)$ mit $a' > 0 \forall a' \in A$ ist $f(w)$ eine A -Ecke von $\phi(w) \forall w \in W$.

§ 3: Die Integration von Korrespondenzen

Eine Integrationstheorie für Korrespondenzen kann man auf zwei Arten betreiben. Faßt man eine Korrespondenz ϕ von einer Menge W in einen Raum E als Abbildung von W nach $\mathcal{O}(E)$ auf, so hat man nach Bedingungen zu suchen, unter denen sich auf $\mathcal{O}(E)$ eine lineare Struktur erklären läßt. Es stellt sich heraus, daß dies unter allgemeinen Voraussetzungen nur möglich ist, wenn $\mathcal{O}(E) = \mathcal{L}(E)$ ist. In diesem Fall läßt sich $\mathcal{O}(E)$ sogar in einen Banachraum einbetten und man kann die Integration von Korrespondenzen als Integration Banachraumwertiger Funktionen behandeln. Diesen Weg schlägt G. Debreu in [16] ein. - Für Anwendungen scheint mir das von vielen anderen Autoren vertretene Konzept günstiger zu sein (siehe etwa: [3], [13], [22], [32] und [35]): Die Korrespondenz wird als mehrdeutige Funktion eingeführt und das Mengenintegral mit Hilfe der integrierbaren Auswahlfunktionen erklärt. Wir wollen in dieser Arbeit dieses Konzept verfolgen.

Den Betrachtungen dieses Paragraphen legen wir einen Maßraum $(W, \mathcal{A}, m)$ und zwei lineare Räume E und F zugrunde, die vermöge einer Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Dualsystem $\langle F, E \rangle$ bilden. In Anlehnung an bekannte Begriffe nennen wir eine Funktion $f: W \rightarrow E$ schwach oder genauer m - $\langle F, E \rangle$ -integrierbar, wenn $\forall x' \in F$ die reellwertige Funktion $\langle x', f(\cdot) \rangle$ m -integrierbar ist. Das m - $\langle F, E \rangle$ -Integral $\int_W f dm$ ist durch die Gleichung

$$\langle x', \int_W f dm \rangle = \int_W \langle x', f(\cdot) \rangle dm \quad \forall x' \in F$$

erklärt.

Wir erinnern daran, daß im allgemeinen $\int_W f dm$ ein Element des algebraischen Duals F^* von F ist. Mit Pilzweiger K., [29], wollen wir das duale Paar $\langle F, E \rangle$ vom Typ $J-(W, \mathcal{A}, m)$ nennen, wenn für jede m - $\langle F, E \rangle$ -integrierbare Funktion $f: W \rightarrow E$ das Integral $\int_W f dm$ in E liegt.

In den nächsten beiden Lemmata untersuchen wir Spezialfälle, in denen $\int_W f dm$ in E liegt:

(3.1) Lemma: Sei $(W, \mathcal{A}, m)$ ein σ -endlicher Maßraum und $\langle F, E \rangle$ ein duales Paar. Gibt es auf F eine bezüglich des Dualsystems $\langle F, E \rangle$ zulässige lokalkonvexe Hausdorff-Topologie τ_F , so daß (F, τ_F) ein Fréchetraum ist, so liegt das Integral $\int_W f dm$ jeder m - $\langle F, E \rangle$ -integrierbaren Funktion $f: W \rightarrow E$ in E .

Beweis:

[29], (1.3), (Folge des Satzes von Gelfand-Dunford).

Δ

(3.2) Lemma: Sei $(W, \mathcal{A}, m)$ ein beliebiger Maßraum und E ein separabler Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$ und stetigem Dual E' . Dann liegt für jede Bochnerintegrierbare Funktion $f: W \rightarrow E$ - (d.h. $W \ni w \mapsto \|f(w)\| \in \mathbb{R}$ ist m -integrierbar) - das m - $\langle E', E \rangle$ -Integral $\int_W f dm$ in E . (Aus "Bochnerintegrierbar" folgt "schwach integrierbar").

Beweis:

Wir zeigen, daß $\int_W f dm$ ein $\mathcal{G}(E', E)$ -stetiges Funktional auf E' ist. Wegen [23], § 21.9(5), genügt es, die Folgenstetigkeit im Punkt 0 zu zeigen:

Sei $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen 0 konvergente Folge in $(E', \mathcal{G}(E', E))$.

Dann konvergiert die Folge $(\langle x'_n, f(\cdot) \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ m -integrierbarer Funktionen auf W punktweise gegen die 0-Funktion.

Wir dürfen o.B.d.A. $\|x'_n\| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ annehmen. Daher ist

$$|\langle x'_n, f(w) \rangle| \leq \|f(w)\| \quad \forall w \in W.$$

Wegen der vorausgesetzten Bochnerintegrierbarkeit von f , ist der Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz anwendbar, aus welchem folgt, daß $(\langle x'_n, \int_W f dm \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Δ

Bemerkung: (3.2) ist kein Spezialfall von (3.1), denn die Banachraumtopologie auf E' ist nur bezüglich des dualen Paares $\langle E', E \rangle$ zulässig, wenn E reflexiv ist.

Nach diesen einleitenden Betrachtungen kommen wir zu

(3.3) Definition: Es seien $(W, \mathcal{A}, m)$ ein Maßraum, $\langle F, E \rangle$ ein duales Paar aus linearen Räumen E und F und $\phi: W \rightarrow \mathcal{G}(E)$ eine Korrespondenz. Dann definieren wir:

- a) ϕ heißt Ri-integrierbar bezüglich m und $\langle F, E \rangle$, wenn $\forall x' \in F$ die Funktionen $h(x'; \phi(\cdot)): W \rightarrow \mathbb{R}$ m -integrierbar sind.

- b) ϕ heißt Au-integrierbar bezüglich m und $\langle F, E \rangle$, wenn es eine m- $\langle F, E \rangle$ -integrierbare m-fast-Auswahlfunktion $f: W \rightarrow E$ von ϕ gibt (d. h. $f(w) \in \phi(w)$ für m-fast alle $w \in W$).
- c) $L(\phi) := L(\phi; (W, \mathcal{A}, m), \langle F, E \rangle) := \{f: W \rightarrow E; \text{ m-} \langle F, E \rangle\text{-integrierbar und } f(w) \in \phi(w) \text{ für m-fast alle } w \in W\}$.
- d) Ist ϕ Au-integrierbar bezüglich m, so heißt
- $$\int_W \phi \, dm := \left\{ \int_W f \, dm; f \in L(\phi) \right\}$$
- das Integral von ϕ bezüglich m.

Die Bemerkung (2.2) b) gilt sinngemäß auch hier. - Wir bringen jetzt zwei Ergebnisse aus [35], die bei der späteren Anwendung der Theorie der Korrespondenzen von fundamentaler Bedeutung sein werden.

- (3.4) Satz: Es seien $(W, \mathcal{A}, m)$ ein σ -endlicher Maßraum, $\langle F, E \rangle$ ein duales Paar aus linearen Räumen E und F, derart daß auf F eine separable bezüglich des dualen Paares zulässige Topologie τ_F existiert, und $\phi: W \rightarrow \mathcal{F}_C(E)$ eine Korrespondenz, die die folgenden Voraussetzungen erfülle:
- (i) ϕ ist Ri-meßbar.
 - (ii) Zu jedem $w \in W$ gibt es ein $x'_0(w) \in F$, so daß die Stützfunktion $h(\cdot; \phi(w))$ in $x'_0(w)$ endlichwertig und stetig ist.
 - (iii) Es gibt in (F, τ_F) eine nichtleere offene Menge U' , so daß $\forall x' \in U'$ die Funktionen $W \ni w \mapsto h(x'; \phi(w)) \in \mathbb{R}$ m-integrierbar sind.

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(Weg 1): ϕ ist Au-integrierbar.

(Weg 2): $\forall x' \in F$ sind die Funktionen

$W \ni w \mapsto h(x'; \phi(w)) \in \mathbb{R}$ m-quasi-integrierbar.

(Weg 3): Die Funktion $F \ni x' \mapsto \int_W h(x'; \phi(\cdot)) dm \in \bar{\mathbb{R}}$
ist die Stützfunktion von $\int_W \phi dm$.

Beweis:

[35], (4.1).

Δ

Aus diesem Satz folgt, daß unter geeigneten Voraussetzungen an die Stützfunktion (siehe (ii)) aus der Ri-Integrierbarkeit die Au-Integrierbarkeit folgt. Daß die Umkehrung nicht zu gelten braucht, zeigt das einfache Beispiel, in dem $\phi(w) := E \quad \forall w \in W$. Hier ist $L(\phi) \neq \phi$, z. B. liegt die Nullfunktion in $L(\phi)$. ϕ ist aber nicht Ri-integrierbar.

Bevor wir zum nächsten Resultat aus [35] kommen, soll gezeigt werden, daß die Aussagen (Weg 2) und (Weg 3) aus (3.4) auch für allgemeinere Korrespondenzen gelten, wenn man nur an das duale Paar $\langle F, E \rangle$ noch zusätzliche Forderungen stellt. Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung von Theorem C aus dem Appendix in [20]:

(3.5) Satz: Es seien $(W, \mathcal{K}, m)$ ein vollständiger endlicher Maßraum und $\langle F, E \rangle$ ein duales Paar aus linearen Räumen E und F . Auf F existiere eine zulässige Topologie τ_F , so daß (F, τ_F) ein separabler Fréchetraum ist. Die Korrespondenz $\phi: W \rightarrow \mathcal{P}_0(E)$ erfülle

- (i) ϕ ist Au-meßbar bezüglich $\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}(\mathcal{C}(E, F))$,
- (ii) ϕ ist Au-integrierbar bezüglich m .

Dann gilt (Weg 2) und (Weg 3).

Beweis:

1) ϕ ist Ri-meßbar: Es sei τ_E die gemäß (2.16) existierende Topologie auf E mit $\mathcal{C}(E, F) \subset \tau_E$, die E zu einem polnischen Raum macht. Dann ist ϕ Au-meßbar bezüglich $\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}(\tau_E)$, somit nach (2.7) auch nach innen meßbar bezüglich $\mathcal{K}$ und τ_E . Das zieht aber die innere Meßbarkeit bezüglich $\mathcal{K}$ und $\mathcal{C}(E, F)$

und daher infolge (2.11) die Ri-Meßbarkeit von ϕ nach sich.

2) $\forall x' \in F$ ist $h(x'; \phi(\cdot))$ m-quasi-integrierbar und es gilt

$$(1) \int_W h(x'; \phi(\cdot)) dm \leq h(x'; \int_W \phi dm):$$

Die Relation (1) ist offensichtlich erfüllt; somit folgt aus 1) die Quasi-Integrierbarkeit.

3) Der Beweis von

$$(2) h(x'; \int_W \phi dm) \leq \int_W h(x'; \phi(\cdot)) dm:$$

Mit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen wir eine abzählbare Nullumgebungs-basis von $(F, \mathcal{T}_F)$ und definieren dann für ein $g \in L(\phi)$ (vgl. (ii)) die Korrespondenzen $\phi_n: W \rightarrow \mathcal{P}_0(E)$ durch

$$\phi_n(w) = (\phi(w) - \{g(w)\}) \cap U_n^0.$$

Offensichtlich ist jedes ϕ_n Au-meßbar und daher auch Ri-meß-bar; das zeigt man wie unter 1). Außerdem haben wir $\forall n \in \mathbb{N} \forall x' \in F \forall w \in W$ die Abschätzungen

$$(3) h(x'; \phi_n(w)) \leq 0, \quad (\text{da } 0 \in \phi_n(w))$$

$$(4) h(x'; \phi_n(w)) \geq h(x'; U_n^0) > -\infty \text{ (Banach-Alaoglu!)}.$$

Also ist jede Korrespondenz ϕ_n Ri-integrierbar bezüglich des endlichen Maßes m.

Da für jedes $x' \in F$ die monoton fallende Folge $(h(x'; \phi_n(\cdot)))_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen gegen $h(x'; \phi(\cdot)) - \langle x', g(\cdot) \rangle$ konvergiert, (in $\mathbb{R}$), folgt aus [27], 3.3 die Beziehung

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_W h(x'; \phi_n(\cdot)) dm = \int_W h(x'; \phi(\cdot)) dm - \int_W \langle x', g(\cdot) \rangle dm.$$

Betrachten wir jetzt ein festes $x'_0 \in F$, eine beliebige reelle Zahl $\lambda > \int_W h(x'_0; \phi(\cdot)) dm$ und ein $\epsilon > 0$. Es existiert nach (5)

eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$(6) \int_W h(x'_0; \phi_{n_0}(\cdot)) dm < \lambda - \int_W \langle x'_0, g(\cdot) \rangle dm.$$

Wir definieren noch eine Korrespondenz $\eta: W \rightarrow \mathcal{P}_0(E)$ durch die Vorschrift

$$\eta(w) := \{x \in \phi_n(w) : \langle x'_0, x \rangle < h(x'_0; \phi_n(w)) + \epsilon\}.$$

η ist Au-meßbar bezüglich $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{T}_E)$; also liefert uns

(2.20) eine $\mathcal{A} - \mathcal{L}(\mathcal{T}_E)$ - und damit $\mathcal{A} - \mathcal{L}(\mathcal{G}(E, F))$ -meßbare Funktion $f: W \rightarrow E$ mit $f(w) \in \eta(w)$ m-fast überall. Da $f(w) \in \phi_n(w)$ m-fast überall, ist f m- $\langle F, E \rangle$ -integrierbar. Also liegt $f + g$ in $L(\phi)$. Außerdem gilt die Abschätzung:

$$(7) \quad \left\langle x'_0, \int_W (f + g) dm \right\rangle < \int_W h(x'_0; \phi_n(\cdot)) dm + \epsilon \cdot m(W) + \\ + \int_W \langle x'_0, g(\cdot) \rangle dm \\ < \lambda + \epsilon \cdot m(W),$$

woraus, da ϵ beliebig war, $h(x'_0; \int_W \phi dm) \leq \lambda$, und da λ beliebig war, die Relation (2) für $x' = x'_0$ folgt. Δ

(3.6) Satz: Es seien $(W, \mathcal{A}, m)$ ein $\mathcal{G}$ -endlicher Maßraum, $\langle F, E \rangle$ ein duales Paar aus linearen Räumen E und F , derart daß auf F eine separable bezüglich des dualen Paares zulässige Topologie τ_F existiert, und $\phi: W \rightarrow \mathcal{G}_c(E)$ eine Korrespondenz, die die folgenden Voraussetzungen erfülle:

- (i) Es gibt eine Zerlegung $W = \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j$ von W in meßbare Mengen W_j , so daß die Mengen $\{h(\cdot; \phi(w)); w \in W_j\}, i \in \mathbb{N}$, von Funktionen auf F gleichstetig sind.
- (ii) ϕ ist Ri-integrierbar.

Dann ist ϕ Au-integrierbar und das m- $\langle F, E \rangle$ -Integral $\int_W \phi dm$ eine konvexe und $\mathcal{G}(F^*, F)$ -kompakte Teilmenge von F^* .

Beweis:

[35], (6.6).

Δ

(3.7) Bemerkung: Im Beweis von (3.6) wird die Teilmenge $L(\phi; (W, \mathcal{A}, m), \langle F, E \rangle)$ von dem Raum $L_E^\alpha = \{f: W \rightarrow E; f \text{ m-}\langle F, E \rangle\text{-integrierbar, es gibt eine Zerlegung } W = \bigcup_{i=1}^\infty W_i \text{ von } W \text{ in Mengen } W_i \in \mathcal{A}, \text{ so daß } f(W_i) \text{ eine gleichstetige Teilmenge von } E \text{ ist}\}$ untersucht. Unter der Zusatzvoraussetzung " $0 \in \phi(w)$ $\forall w \in W$ " wird gezeigt, daß $L(\phi)$ eine $\mathcal{G}(L_{E,F}^\alpha \otimes L_{\mathbb{R}}^\infty)$ -kompakte Teilmenge von L_E^α ist. Dabei bezeichnet $F \otimes L_{\mathbb{R}}^\infty$ das Tensorprodukt der Räume F und $L_{\mathbb{R}}^\infty$. In [35], (6.1), beweist Wegmann, R., daß L_E^α und $F \otimes L_{\mathbb{R}}^\infty$ vermöge der Bilinearform

$$B(f, x' \otimes g) := \int_W \langle x', f(\cdot) \rangle \cdot g \, dm$$

$\forall f \in L_E^\alpha, g \in L_{\mathbb{R}}^\infty, x' \in F$

ein duales Paar bilden.

(3.8) Korollar: Setzen wir in (3.6) statt der Separabilität von (F, τ_F) voraus, daß (F, τ_F) ein (A.2)-Raum ist (d. h. die Topologie τ_F eine abzählbare Basis besitzt), und ändern wir (i) ab zu

(i)⁰: Die Stützfunktionen $h(\cdot; \phi(w))$ von $\phi(w)$ seien für jedes $w \in W$ auf ganz F endlichwertig und stetig,

dann gilt die Aussage von (3.6) ebenfalls.

Beweis:

[35], (6.7).

Δ

An einfachen Beispielen kann man sich klarmachen, daß das Integral einer abgeschlossenwertigen Korrespondenz nicht abgeschlossen zu sein braucht. Bereits die Minkowskische Summe zweier abgeschlossener Mengen muß nicht abgeschlossen

sein. Wir behandeln jetzt einen Spezialfall, in dem wir - wenigstens bei endlichem W - noch auf die Abgeschlossenheit der Integralmenge schließen dürfen, der aber nicht durch (3.6) bzw. (3.8) überdeckt wird. Wir benötigen dazu das Konzept "nach vorn beschränkter" Mengen und der "vorderen Hülle" einer Menge, das im endlichdimensionalen Fall von Mammitzsch V. in [25] und im unendlichdimensionalen Fall von Pilzweger K. in [29] eingeführt wird.

(3.9) Definition: Es sei $\langle F, E \rangle$ ein duales Paar aus linearen Räumen E und F . In F sei ein stumpfer konvexer Kegel C' mit Spitze O und in E eine $\mathcal{G}(E, F)$ -abgeschlossene konvexe Menge K gegeben. Dann heißt:

- a) K C' -beschränkt, wenn $h(x'; K) \forall x' \in C'$ endlichwertig und stetig ist.
- b) Die Menge $H(K) := H_{C'}(K) := \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{x' \in C'} \{x \in K : \langle x', x \rangle = h(x'; K)\} \right)$ die C' -Hülle von K .

(3.10) Bemerkung: Ist K C' -beschränkt, so ist $H(K)$ nichtleer und es gilt: $h(x'; K) = h(x'; H(K)) \forall x' \in C'$.

Bevor wir das angekündigte Ergebnis formulieren und beweisen, wollen wir für später noch zwei andere mit den eingeführten Begriffen zusammenhängende Resultate bringen:

(3.11) Satz: Es liege die Situation von (3.9) vor. Außerdem gelte für den Kegel C' die Beziehung: $C' + (C')^{OO} \subset C'$. Ist dann $H(K)$ $\mathcal{G}(E, F)$ -kompakt, so ist K eine Teilmenge von $H(K) + C$, wobei wir mit C den zu C' dualen Kegel in E bezeichnen.

Beweis:

[29], (4.11).

(3.12) Satz: Es seien $(W, \mathcal{A}, m)$ ein $\mathcal{A}$ -endlicher Maßraum und $\langle F, E \rangle$ ein duales Paar aus linearen Räumen E und F . Auf F existiere eine bezüglich des dualen Paares zulässige Topologie τ_F , so daß (F, τ_F) ein separabler Fréchetraum wird. Es gebe in F einen stumpfen konvexen Kegel C' mit Spitze 0 und mit nichtleerem Inneren. Die Korrespondenz $\phi: W \rightarrow \mathcal{F}_C(E)$ genüge den Bedingungen

- (i) ϕ ist R_i -meßbar.
- (ii) $\forall w \in W$ ist $\phi(w)$ C' -beschränkt.
- (ii') $\forall w \in W$ ist $H(\phi(w))$ $\mathcal{A}(E, F)$ -kompakt.
- (iv) Die Korrespondenz $H(\phi): W \rightarrow \mathcal{A}(E, F) - \mathcal{L}_C(E)$, definiert durch $H(\phi)(w) := H(\phi(w))$, ist R_i -integrierbar bezüglich m .

Dann ist das $m - \langle F, E \rangle$ -Integral $\int_W \phi dm$ eine nichtleere, konvexe und C' -beschränkte Teilmenge von E .

Beweis:

- 1) $\int_W \phi dm \in \Phi$, konvex und Teilmenge von E .

ϕ erfüllt die Voraussetzungen von (3.4). Dazu wähle man als U' die Menge $\text{int} C'$ und berücksichtige (3.10). Daher ist ϕ A_u -integrierbar und somit $L(\phi)$ nichtleer. Wegen der Konvexität jedes $\phi(w)$ ist $L(\phi)$ konvex. Als Bild von $L(\phi)$ unter der linearen Abbildung $J: L_E^1 \rightarrow E$ mit $J(f) = \int_W f dm$ (vgl. (3.1)) ist $\int_W \phi dm$ konvexe Teilmenge von E .

- 2) $\int_W \phi dm$ ist C' -beschränkt.

Wegen (Weg 1) ist $h(x'; \int_W \phi dm) = \int_W h(x'; \phi(\cdot)) dm \quad \forall x' \in F$

und wegen (iv) $\forall x' \in C'$ endlich.

Nach (3.8) ist $\int_W H(\phi) dm$ $\mathcal{G}(E, F)$ -kompakt, also insbesondere τ_F -gleichstetig, d. h. $\forall x' \in F$ ist $h(x'; \int_W H(\phi) dm)$ und somit $\forall x' \in C'$ $h(x'; \int_W \phi dm)$ stetig. Δ

(3.13) Satz: Es seien W eine endliche Menge, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(W)$, m ein Maß auf $(W, \mathcal{A})$ und $\langle F, E \rangle$ ein duales Paar aus linearen Räumen E und F . Auf F existiere eine bezüglich des dualen Paares zulässige Topologie τ_F , so daß (F, τ_F) ein separabler Fréchetraum wird. Es gebe in F einen stumpfen konvexen Kegel C' mit

$$(i) \quad F = C' - C'$$

Für die Korrespondenz $\phi: W \rightarrow \mathcal{G}_c(E)$ gelte:

$$(ii) \quad \forall w \in W \text{ ist } \phi(w) \text{ } C'\text{-beschränkt.}$$

Dann ist das m - $\langle F, E \rangle$ -Integral $\int_W \phi dm$ eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Teilmenge von E .

Beweis:

Es ist nur die Abgeschlossenheit von $\int_W \phi dm$ zu zeigen. Da E Dualraum des separablen Fréchetraumes (F, τ_F) ist, genügt es dafür, die $\mathcal{G}(E, F)$ -Folgenabgeschlossenheit von E nachzuweisen, (vgl. [23], § 21.10(7)).

Sei also x der $\mathcal{G}(E, F)$ -Limes einer Folge $(\int_W f_n dm)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n \in L(\phi)$.

Behauptung 1: Für jedes $w \in W$ ist die Menge $S(w) := \{f_n(w); n \in \mathbb{N}\}$ $\mathcal{G}(E, F)$ -relativ kompakt.

Da im Dualraum eines Fréchetraumes die schwach beschränkten Mengen mit den schwach relativ kompakten Mengen zusammenfallen, ([23], § 21.6(4)), haben wir

$$(1) \sup_{n \in \mathbb{N}} | \langle x', f_n(w) \rangle | < \infty \quad \forall x' \in F \quad \forall w \in W$$

zu zeigen. Wegen (i) gibt es zu jedem $x' \in F$ Elemente $x'_1, x'_2 \in C'$ mit $x' = x'_1 - x'_2$; also gestattet es die Abschätzung

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} | \langle x', f_n(w) \rangle | \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} | \langle x'_1, f_n(w) \rangle | + \sup_{n \in \mathbb{N}} | \langle x'_2, f_n(w) \rangle |,$$

statt (1) die Relation

$$(2) \sup_{n \in \mathbb{N}} | \langle x', f_n(w) \rangle | < \infty \quad \forall x' \in C' \quad \forall w \in W$$

nachzuprüfen. (2) wiederum läßt sich wegen (ii) zu

$$(3) \sup_{n \in \mathbb{N}} \langle x', f_n(w) \rangle < \infty \quad \forall x' \in C' \quad \forall w \in W$$

reduzieren.

Beweisen wir also (3): Sei $x' \in C'$ und $w_0 \in W$ vorgegeben. Es gibt reelle Zahlen $c_1(x')$ und $c_2(x')$ und wegen (ii) zu jedem $w \in W \setminus \{w_0\}$ reelle Zahlen $c(w)$, so daß

$$(4) \quad c_1(x') \leq \langle x', \int_W f_n dm \rangle \leq c_2(x'), \text{ und}$$

$$(5) \quad \langle x', \int_{W \setminus \{w_0\}} f_n dm \rangle \geq c_3 := \int_{W \setminus \{w_0\}} c(w) dm.$$

Aus (4) und (5) folgt sofort (3) für $w = w_0$.

Behauptung 2: Die Menge $T := \int_W \overline{co} S dm$ ist $\mathcal{G}(E, F)$ -kompakt.

Das folgt sofort aus (3.8) (da W endlich ist); denn $\forall w \in W$ ist $\overline{S(w)}$, und da (F, τ_F) als Fréchetraum tonneliert sowie $E = (F, \tau_F)'$ ist, auch $\overline{co} \overline{S(w)} = \overline{co} S(w)$ $\mathcal{G}(E, F)$ -kompakt.

Als Grenzwert der Folge $(\int_W f_n dm)_n \in \mathbb{N}$ in T liegt x somit in T , und da $T \subset \int_W \phi dm$ ist, auch in $\int_W \phi dm$. Δ

(3.14) Bemerkung: Die Behauptung 1 im Beweis zu (3.13) läßt sich auch für eine beliebige Menge W zeigen, wenn nur $\mathcal{A} = \mathcal{P}(W)$ ist.

Für die spätere Anwendung benötigen wir noch einen Satz über die Stetigkeit der Integralmengenkorrespondenz einer integrierbaren Korrespondenz, die stetig von einem Parameter abhängt. Alle Ergebnisse, die in der Literatur über diesen Problemkreis gefunden wurden, [3], Theorem 5, [16] (6.3) und [22], Theorem 4, sind in dem von uns ins Auge gefaßten Zusammenhang nicht zu verwenden.

(3.15) Satz: Es seien $(W, \mathcal{A}, m)$ ein σ -endlicher Maßraum, (E_1, τ_1) ein metrischer Raum und E_2 und F_2 lineare Räume, die vermöge einer Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein duales Paar $\langle F_2, E_2 \rangle$ vom Typ J - $(W, \mathcal{A}, m)$ bilden. Auf F_2 existiere eine bezüglich des Dualsystems zulässige Topologie τ_2 , die eine abzählbare Basis besitzt. $\psi: W \rightarrow \mathcal{F}_c(E_2)$ sei eine Korrespondenz mit

- (i) $\psi(w)$ ist F_2 -beschränkt $\forall w \in W$
- (ii) ψ ist Ri-integrierbar bezüglich m .

Die Korrespondenz $\phi: W \times E_1 \rightarrow \mathcal{F}_c(E_2)$ erfülle die Voraussetzungen:

- (iii) $\phi(w, x) \subset \psi(w) \quad \forall x \in E_1 \quad \forall w \in W$
- (iv) $\phi(\cdot, x)$ ist Ri-integrierbar bezüglich m $\forall x \in E_1$
- (v) $\phi(w, \cdot)$ ist nach außen stetig bezüglich τ_1 und $\mathcal{G}(E_2, F_2) \quad \forall w \in W$.

Dann ist die durch $\hat{\phi}(x) := \int_W \phi(\cdot, x) dm$ defi-

nierte Korrespondenz $\hat{\phi}: E_1 \rightarrow \mathfrak{G}(E_2, F_2) - \mathcal{L}_c(E_2)$
nach außen stetig.

Beweis:

Nach (3.8) ist die Menge $Y := \int_W \psi dm$ $\mathfrak{G}(E_2, F_2)$ -kompakt.

Daher ist $(Y, \mathfrak{G}(E_2, F_2) \cap Y)$ ein kompakter metrischer Raum, und wir können, da $\hat{\phi}(x) \subset Y \forall x \in E_1$ mit Hilfe des Stetigkeitskriteriums aus (1.24) a) argumentieren:

Sei $x_0 \in E_1$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in E_1 gegen x_0 konvergente Folge. Außerdem sei $y_n \in \hat{\phi}(x_n)$, so daß die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Y gegen ein $y_0 \in Y$ konvergiert. Wir haben zu zeigen, daß y_0 in $\hat{\phi}(x_0)$ liegt. Zu jedem y_n gibt es ein $f_n \in L(\psi)$ mit $y_n = \int_W f_n dm$. Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt in $L(\psi)$ nach (3.7) einen $\mathfrak{G}(L_{E_2}^\alpha, F_2 \otimes L_{\mathbb{H}}^\infty)$ -Berührungspunkt f_0 .

Wir behaupten nun:

- (1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Zu jedem } y' \in F_2 \text{ existiert eine } m\text{-Nullmenge } M(y') \in \mathfrak{A}, \\ \text{so daß } \langle y', f_0(w) \rangle \geq h(y'; \phi(w, x_0)) \quad \forall w \in W \setminus M(y'). \end{array} \right.$
- (2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Es gibt eine } m\text{-Nullmenge } M \in \mathfrak{A}, \text{ so daß} \\ \langle y', f_0(w) \rangle \geq h(y'; \phi(w, x_0)) \quad \forall w \in W \setminus M \quad \forall y' \in F_2. \end{array} \right.$

zu (1): Wir schließen indirekt, nehmen also an, es gebe ein $y' \in F_2$ und eine Menge $M_0 \in \mathfrak{A}$ mit $m(M_0) > 0$, so daß

$$\langle y', f_0(w) \rangle < h(y'; \phi(w, x_0)) \quad \forall w \in M_0.$$

Also ist:

$$(3) \quad \int_{M_0} \langle y', f_0(\cdot) \rangle dm < \int_{M_0} h(y'; \phi(\cdot, x_0)) dm$$

Setzen wir $\varepsilon := \frac{1}{4} \int_{M_0} (h(y'; \phi(\cdot, x_0)) - \langle y', f_0(\cdot) \rangle) dm$. Dann

existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$, so daß

$$(4) \quad \left| \int_{M_0} \langle y', f_{n_k}(\cdot) \rangle dm - \int_{M_0} \langle y', f_0(\cdot) \rangle dm \right| < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Nach (1.29) und dem Lemma von Fatou ist:

$$(5) \quad \int_{M_0} h(y'; \phi(\cdot, x_0)) dm \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{M_0} h(y'; \phi(\cdot, x_{n_k})) dm.$$

Das bedeutet wegen (3), daß eine Teilfolge $(k_l)_{l \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ existiert, so daß

$$(6) \quad \begin{aligned} \int_{M_0} h(y'; \phi(\cdot, x_{n_{k_l}})) dm &\geq \frac{1}{2} \left(\int_{M_0} h(y'; \phi(\cdot, x_0)) dm \right. \\ &\quad \left. + \int_{M_0} \langle y', f_0(\cdot) \rangle dm \right) > \\ &> \int_{M_0} \langle y', f_0(\cdot) \rangle dm, \forall l \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wegen (4) und (6) erhalten wir die Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} &\int_{M_0} \langle y', f_{n_{k_l}}(\cdot) \rangle dm - \int_{M_0} \langle y', f_0(\cdot) \rangle dm < \\ &< \frac{1}{4} \left(\int_{M_0} h(y'; \phi(\cdot, x_0)) dm - \int_{M_0} \langle y', f_0(\cdot) \rangle dm \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{M_0} h(y'; \phi(\cdot, x_{n_{k_l}})) - \int_{M_0} \langle y', f_0(\cdot) \rangle dm \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{M_0} \langle y', f_{n_{k_l}}(\cdot) \rangle dm - \int_{M_0} \langle y', f_0(\cdot) \rangle dm \right), \forall l \in \mathbb{N}; \end{aligned}$$

d. h. für alle $l \in \mathbb{N}$ wäre:

$$\int_{M_0} \langle y', f_{n_{k_l}}(\cdot) \rangle dm < \int_{M_0} \langle y', f_0(\cdot) \rangle dm, \text{ im Widerspruch zu (6)}$$

und der Tatsache, daß die $f_{n_{k_l}}$ in $L(\phi(\cdot, x_{n_{k_l}}))$ liegen. - Also gilt (1).

zu (2): Es gibt in F_2 eine abzählbare dichte Folge $(y'_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Mit den unter (1) konstruierten m -Nullmengen $M(y'_n)$ setzen wir: $M := \bigcup_{n=1}^{\infty} M(y'_n)$.

Wegen (1) gilt dann:

$$(7) \quad \langle y'_n, f_0(w) \rangle \geq h(y'_n; \phi(w, x_0)) \quad \forall w \in W \setminus M \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Sei nun $y' \in F_2$ ein beliebiges Element. Wäre für ein $w \in W \setminus M$

$$h(y'; \phi(w, x_0)) - \langle y', f_0(w) \rangle > 0,$$

dann gäbe es wegen der Stetigkeit von $h(\cdot; \phi(w, x_0))$ und $\langle \cdot, f_0(w) \rangle$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$h(y'_n; \phi(w, x_0)) - \langle y'_n, f_0(w) \rangle > 0$$

wäre $\forall n \geq n_0$, was aber wegen (7) nicht geht. Also gilt (2).

Aus (2) folgt nun sofort, daß $f_0(w) \in \phi(w, x_0)$ für m -fast alle $w \in W$. Erinnern wir uns jetzt an die Definition der f_n , dann sehen wir die für alle $y' \in F_2$ gültige Gleichung

$$\begin{aligned} \langle y', y_0 \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y', y_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y', \int_W f_n dm \rangle = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_W \langle y', f_n(\cdot) \rangle dm = \int_W \langle y', f_0(w) \rangle dm = \\ &= \left\langle y', \int_W f_0 dm \right\rangle \text{ ein, d. h. es ist } y_0 = \int_W f_0 dm. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß y_0 in $\hat{\phi}(x_0)$ liegt.

Δ

§ 4: Der Satz von den Übergangswahrscheinlichkeiten für Korrespondenzen

In diesem Paragraphen verallgemeinern wir ein spezielles Resultat aus der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Korrespondenzen: Gegeben seien zwei Meßräume $(W_1, \mathcal{A}_1)$ und $(W_2, \mathcal{A}_2)$. $m: \mathcal{A}_1 \rightarrow [0, \infty[$ sei ein endliches Maß auf $\mathcal{A}_1$. Q sei eine Übergangswahrscheinlichkeit von $(W_1, \mathcal{A}_1)$ nach

$(W_2, \mathcal{A}_2)$ (kurz: Ü.-W.); darunter wird eine Funktion $Q: W_1 \times \mathcal{A}_2 \rightarrow [0,1]$ verstanden, die den folgenden beiden Bedingungen genügt:

$Q(w_1, \cdot): \mathcal{A}_2 \rightarrow [0,1]$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\forall w_1 \in W_1$

$Q(\cdot, M_2): W_1 \rightarrow [0,1]$ ist $\mathcal{A}_1$ -meßbar $\forall M_2 \in \mathcal{A}_2$.

Dann ist aus der Wahrscheinlichkeitstheorie das folgende Resultat bekannt:

(4.1) Satz: In der oben beschriebenen Situation gilt:

(Ü.1) Es existiert ein eindeutig bestimmtes Maß

P auf $(W_1 \times W_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, so daß

$$P(M_1 \times M_2) = \int_{M_1} Q(w_1, M_2) dm \quad \forall M_1 \in \mathcal{A}_1 \quad \forall M_2 \in \mathcal{A}_2.$$

(Ü.2) Für jede P -integrierbare (bzw. quasi-

integrierbare) Funktion $f: W_1 \times W_2 \rightarrow \mathbb{R}$

ist die durch $f_{w_1}(w_2) := f(w_1, w_2)$ definierte

Funktion $f_{w_1}: W_2 \rightarrow \mathbb{R}$ für m -fast alle

$w_1 \in W_1$ $Q(w_1, \cdot)$ -integrierbar (bzw. quasi-integrierbar).

(Ü.3) Die durch $g(w_1) := \int_{W_2} f_{w_1} dQ(w_1, \cdot)$ definierte

Funktion $g: W_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\mathcal{A}_1$ -meßbar

und m -integrierbar (bzw. quasi-integrierbar).

(Ü.4) Es gilt die Formel:

$$\int_{W_1 \times W_2} f dP = \int_{W_1} \left(\int_{W_2} f_{w_1}(\cdot) dQ(w_1, \cdot) \right) dm.$$

Beweis:

[27], Satz 3.2.1.

△

Dieser Satz kann sinngemäß unter zusätzlichen Voraussetzungen für Funktionen mit Werten in lokalkonvexen Hausdorff-Räumen verallgemeinert werden.

(4.2) Satz: Es liege die oben beschriebene Situation vor. Außerdem seien E und F lineare Räume, die bezüglich einer Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein duales Paar $\langle F, E \rangle$ bilden.

f sei eine P - $\langle F, E \rangle$ -integrierbare Funktion, so daß es eine m -Nullmenge $N_1 \subset W_1$ gibt mit:

(i) f_{w_1} ist $Q(w_1, \cdot)$ - $\langle F, E \rangle$ -integrierbar
 $\forall w_1 \in W_1 \setminus N_1$

(ii) $\int_{W_2} f_{w_1} dQ(w_1, \cdot) \in E \quad \forall w_1 \in W_1 \setminus N_1.$

Dann gilt:

(ÜV.3): Die Funktion $g: W_1 \rightarrow E$, definiert durch

$$g(w_1) = \begin{cases} 0 & , w_1 \in N_1 \\ \int_{W_2} f_{w_1} dQ(w_1, \cdot) & , w_1 \in W_1 \setminus N_1 \end{cases}$$

ist $\langle F, E \rangle$ -meßbar bezüglich $\mathcal{A}_1$ und m - $\langle F, E \rangle$ -integrierbar.

(ÜV.4): Es gilt die Formel:

$$\int_{W_1 \times W_2} f dP = \int_{W_1} \left(\int_{W_2} f_{w_1} dQ(w_1, \cdot) \right) dm.$$

Beweis:

[11], chap. VI, § 1, Nr. 1, Prop. 3.

Δ

Mit Hilfe dieser beiden Sätze und des Satzes (3.4) ist es nicht schwer, ein entsprechendes Resultat für Korrespondenzen zu bekommen:

(4.3) Satz: Die Meßräume $(W_1, \mathfrak{A}_1), (W_2, \mathfrak{A}_2)$ und die Funktionen m und Q mögen die zu Beginn des Paragraphen geschilderten Eigenschaften besitzen. P sei das Maß auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ gemäß (Ü.1) aus (4.1). Die linearen Räume E und F mögen für jeden Maßraum $(W, \mathfrak{A}, \mu)$ ein duales Paar $\langle F, E \rangle$ vom Typ $J\text{--}(W, \mathfrak{A}, \mu)$ bilden. Außerdem gebe es auf F eine bezüglich des dualen Paares zulässige Topologie τ_F , so daß (F, τ_F) separabel ist. D' sei die zugehörige abzählbare dichte Teilmenge von F . Die Korrespondenz $\phi: W_1 \times W_2 \rightarrow \mathfrak{f}_c(E)$ erfülle die folgenden Voraussetzungen:

- (i) ϕ ist Ri-meßbar bezüglich $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$.
- (ii) Zu jedem $(w_1, w_2) \in W_1 \times W_2$ existiert ein $x'_0(w_1, w_2) \in F$, so daß die Stützfunktion $h(\cdot; \phi(w_1, w_2))$ an dieser Stelle endlichwertig und stetig ist.
- (iii) In F gebe es eine nichtleere offene Menge U' , so daß $\forall x' \in U'$ die Funktionen $W_1 \times W_2 \ni (w_1, w_2) \mapsto h(x'; \phi(w_1, w_2)) \in \mathbb{R}$ P -integrierbar sind.
- (iv) In W_1 gebe es eine m -Nullmenge N_1 , so daß $\forall x' \in U' \forall w_1 \in N'_1 := W_1 \setminus N_1$ die Funktionen $W_2 \ni w_2 \mapsto h(x'; \phi_{w_1}(w_2)) \in \mathbb{R}$ $Q(w_1, \cdot)$ -integrierbar sind.
(Dabei sei $\phi_{w_1}: W_2 \rightarrow \mathfrak{f}_c(E)$ durch $\phi_{w_1}(w_2) := \phi(w_1, w_2)$ definiert).
- (v) Zu jedem $w_1 \in N'_1$ gebe es einen Punkt $z'_0(w_1) \in U'$, an dem die Funktion

$$F \ni x' \mapsto \int_{W_2} h(x'; \phi_{w_1}(\cdot)) dQ(w_1, \cdot) \in \mathbb{R}$$

stetig ist.

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(ÜK.2) $\forall w_1 \in N'_1$ sind die Korrespondenzen $\phi_{w_1}: W_2 \rightarrow \mathcal{F}_c(E)$ Au-integrierbar und Ri-quasi-integrierbar bezüglich $Q(w_1, \cdot)$.

(ÜK.3) Die Korrespondenz $\psi: W_1 \rightarrow \mathcal{P}_0(E)$, die durch

$$\psi(w_1) := \begin{cases} \int_{W_2} \phi_{w_1} dQ(w_1, \cdot) & , \forall w_1 \in N'_1 \\ \{0\} & , \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist, ist Au-integrierbar und Ri-quasi-integrierbar bezüglich m .

(ÜK.4) Es gilt die Formel:

$$\overline{\int_{W_1 \times W_2} \phi dP} = \overline{\int_{W_1} \left[\int_{W_2} \phi_{w_1} dQ(w_1, \cdot) \right] dm}.$$

Beweis:

Wir führen den Beweis, indem wir die folgenden vier Punkte zeigen:

- (1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Es existiert eine Teilmenge } L_0 \subset W_1 \times W_2, \text{ die in einer} \\ \text{P-Nullmenge enthalten ist, so daß } h(x'; \phi(w_1, w_2)) \\ \forall (w_1, w_2) \in W_1 \times W_2 \setminus L_0 \text{ und } \forall x' \in U' \text{ endlichwertig und} \\ \text{stetig ist.} \end{array} \right.$
- (2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Es existiert eine Funktion } f: W_1 \times W_2 \rightarrow E \text{ mit} \\ \text{(a) } f \text{ ist P-(E,F)-integrierbar} \\ \text{(b) } \forall w_1 \in N'_1 \text{ ist } f_{w_1} Q(w_1, \cdot)\text{-integrierbar} \\ \text{(c) } \forall (w_1, w_2) \in W_1 \times W_2 \text{ ist } f(w_1, w_2) \in \phi(w_1, w_2) \end{array} \right.$
- (3) $\int_{W_1} \psi dm \neq \phi.$

- (4) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Die durch } \bar{\psi}(w_1) := \overline{\psi(w_1)} \text{ definierte Korrespondenz} \\ \bar{\psi} \text{ erfüllt die Voraussetzungen von (3.4).} \end{array} \right.$

Sind diese vier Punkte gezeigt, ist der Beweis fertig; denn:

(ÜK.2) folgt aus (2) (b) und (c), der Voraussetzung (i)

und der Relation $h(x'; \phi_{w_1}(w_2)) \leq \langle x', f_{w_1}(w_2) \rangle$

$\forall (w_1, w_2) \in W_1 \times W_2$. (ÜK.3) folgt aus (3) und (3.4) (Weg 2).

(ÜK.4) ergibt sich so: Aus (3.4) (Weg 3) folgt, daß die Funktion

$$F \ni x' \mapsto \int_{W_1 \times W_2} h(x'; \phi(\cdot, \cdot)) dP \in \bar{\mathbb{R}}$$

die Stützfunktion von $\int_{W_1 \times W_2} \phi dP$ und die Funktion

$$F \ni x' \mapsto \int_{W_1} h(x'; \psi(\cdot)) dm \in \bar{\mathbb{R}}$$

die Stützfunktion von $\int_{W_1} \bar{\psi} dm$ ist. Da nun $\forall w_1 \in N'_1$

$h(x'; \psi(w_1)) = \int_{W_2} h(x'; \phi_{w_1}(\cdot)) dQ(w_1, \cdot)$ ist, folgt

aus (4.1) die Formel:

$$\int_{W_1 \times W_2} h(x'; \phi(\cdot, \cdot)) dP = \int_{W_1} \left\{ \int_{W_2} h(x'; \phi_{w_1}(\cdot)) dQ(w_1, \cdot) \right\} dm$$

und daraus (ÜK.4).

zu (1): $\forall w_1 \in N'_1$ und $\forall x' \in D' \cap U'$ existiert wegen (iv) eine $Q(w_1, \cdot)$ -Nullmenge $N(w_1, x')$ in W_2 , so daß $h(x'; \phi(w_1, w_2)) > -\infty$ $\forall w_2 \in W_2 \setminus N(w_1, x')$. Daher ist $\forall (w_1, w_2)$, die nicht in

$L_0 := N_1 x \bigcup_{w_1 \in N_1} \bigcup_{x' \in D' \cap U'} N(w_1, x')$ liegen, und

$\forall x' \in D' \cap U' \quad h(x'; \phi(w_1, w_2)) > -\infty$. L_0 ist Teilmenge der P-Nullmenge $N_1 x w_2$, also liegt L_0 in $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)_P$.

Für jedes Paar $(w_1, w_2) \in W_1 x w_2$ ist die Menge $F(w_1, w_2) := \{x' \in F: h(x'; \phi(w_1, w_2)) > -\infty\}$ konvex und besitzt wegen (ii) ein nichtleeres Inneres; somit ist $\text{int } \overline{F(w_1, w_2)} \subset F(w_1, w_2)$. Für $(w_1, w_2) \notin L_0$ enthält nun $F(w_1, w_2)$ die Menge $D' \cap U'$, also gilt $U' \subset F(w_1, w_2)$. Aus (2.12) folgt dann unter Berücksichtigung von (ii), daß $h(x'; \phi(w_1, w_2)) \quad \forall x' \in \text{int } F(w_1, w_2)$, also speziell $\forall x' \in U'$ auch stetig ist.

zu (2): Es seien x'_0 ein beliebiger Punkt aus U' , $B' := \{x'_0\} \cup D'$ und B' so wohlgeordnet, daß x'_0 das erste Element von B' wird. Wegen (1) und (2.22) ist $\forall (w_1, w_2) \in W_1 x w_2 \setminus L_0$ die B' -Randmenge von $\phi(w_1, w_2)$ nichtleer. Da B' total ist, besteht sie genau aus einem Punkt $b(w_1, w_2)$. Nach (3.2) aus [35] folgt: Die Funktion $f: W_1 x w_2 \rightarrow E$, definiert durch:

$$f(w_1, w_2) := \begin{cases} b(w_1, w_2) & ; (w_1, w_2) \in W_1 x w_2 \setminus L_0 \\ \text{beliebiger Punkt aus } \phi(w_1, w_2); & \text{sonst} \end{cases}$$

ist $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)_P$ - $\langle F, E \rangle$ -meßbar.

Um (a) und (b) zu zeigen, führen wir die Stützfunktion $k(\cdot; w_1, w_2)$ der x'_0 -Randmenge von $\phi(w_1, w_2)$ ein und beweisen

(5) $\forall x' \in F$ ist die Funktion $k(x'; \cdot, \cdot)$ P-integrierbar,

(6) $\begin{cases} k_{w_1}(x'; w_2) = k(x'; w_1, w_2) \text{ ist Stützfunktion der} \\ x'_0\text{-Randmenge von } \phi_{w_1}(w_2), \text{ und} \end{cases}$

(7) $k(x'; w_1, w_2) \leq \langle x', f(w_1, w_2) \rangle \leq -k(-x'; w_1, w_2)$.

Aus (5) und (7) folgt nämlich (2) (a), und aus (5) in Verbindung mit (Ü.2) aus (4.1) und aus (6) und (7) (2) (b).

zu (5): Sei x'_1 ein beliebiger Punkt aus F . Im Beweisteil

a) zu (3.3) in [35] wird gezeigt:

$$k(x'; w_1, w_2) = \lim_{l \rightarrow \infty} k^{(l)}(x'; w_1, w_2) \quad \forall x' \in F, \text{ wobei} \\ k^{(l)}(x'; w_1, w_2) = h(x' + l x'_0, \phi(w_1, w_2)) - l h(x'_0; \phi(w_1, w_2)), l \in \mathbb{N}.$$

Es sei V' eine noch ganz in U' liegende konvexe Umgebung von x'_0 .

Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$\lambda x'_1 + x'_0 \in V' \quad \forall \lambda \in]-\varepsilon, \varepsilon[.$$

Wegen (iii) können wir damit die reelle endlichwertige Funktion

$$\hat{g}_{x'_1}:]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \hat{g}_{x'_1}(\lambda) := \int_{W_1 \times W_2} h(\lambda x'_1 + x'_0; \phi(\cdot, \cdot)) dP$$

definieren. $\hat{g}_{x'_1}$ ist konkav; denn $\forall \alpha \in]0, 1[$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ gilt:

$$\begin{aligned} \hat{g}_{x'_1}(\alpha \lambda_1 + (1-\alpha) \lambda_2) &= \\ &= \int_{W_1 \times W_2} h((\alpha \lambda_1 + (1-\alpha) \lambda_2) x'_1 + x'_0; \phi(\cdot, \cdot)) dP = \\ &= \int_{W_1 \times W_2} h(\alpha(\lambda_1 x'_1 + x'_0) + (1-\alpha)(\lambda_2 x'_1 + x'_0); \phi(\cdot, \cdot)) dP \geq \\ &\geq \alpha \int_{W_1 \times W_2} h(\lambda_1 x'_1 + x'_0; \phi(\cdot, \cdot)) dP + (1-\alpha) \int_{W_1 \times W_2} h(\lambda_2 x'_1 + x'_0; \phi(\cdot, \cdot)) dP \\ &= \alpha \hat{g}_{x'_1}(\lambda_1) + (1-\alpha) \hat{g}_{x'_1}(\lambda_2). \end{aligned}$$

Nach einem bekannten Resultat aus der Analysis ist dann

$\hat{g}_{x'_1}$ im Punkte 0 rechtsseitig differenzierbar, d. h. es existiert

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} (\hat{g}_{x'_1}(\lambda) - \hat{g}_{x'_1}(0)) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{W_1 \times W_2} k^{(l)}(x'_1; \cdot, \cdot) dP$$

Jede Funktion $k^{(1)}(x'_1; \cdot, \cdot)$, $l \in \mathbb{N}$, ist P-integrierbar, denn es gilt: $k^{(1)}(x'_1; w_1, w_2) = \frac{1}{\lambda} (h(\lambda x'_1 + x'_0; \phi(w_1, w_2)) - h(x'_0; \phi(w_1, w_2)))$, wobei $\lambda = \frac{1}{l}$ gesetzt wird; daher ist

$$\int_{W_1 \times W_2} k^{(1)}(x'_1; \cdot, \cdot) dP = \frac{1}{\lambda} (\hat{g}_{x'_1}'(\lambda) - \hat{g}_{x'_0}'(0)),$$

d.h. das Integral existiert und ist endlich.

Schließlich bilden die $k^{(l)}(x'_1; \cdot, \cdot)$, $l \in \mathbb{N}$, eine isotone Folge, was man folgendermaßen sieht:

$$\begin{aligned} k^{(l+1)}(x'_1; w_1, w_2) &= h(x_1 + (l+1)x'_0; \phi(w_1, w_2)) - (l+1)h(x'_0; \phi(w_1, w_2)) = \\ &= 2 h(\frac{1}{2}(x'_1 + lx'_0) + \frac{1}{2} x'_0; \phi(w_1, w_2)) - (l+1)h(x'_0; \phi(w_1, w_2)) \geq \\ &\geq h(x'_1 + lx'_0; \phi(w_1, w_2)) - l \cdot h(x'_0; \phi(w_1, w_2)) = k^{(l)}(x'_1; w_1, w_2), \end{aligned}$$

$\forall l \in \mathbb{N}$. Dabei nutzen wir die positive Homogenität und die Konkavität der Stützfunktionen aus.

Somit ist auf die Folge $k^{(l)}(x'_1; \cdot, \cdot)$, $l \in \mathbb{N}$, der Satz von Lebesgue anwendbar, aus dem (5) folgt.

zu (3): Nach (2) (b) und (ÜV.3) ist die Funktion $g: W_1 \rightarrow E$, definiert durch

$$g(w_1) = \begin{cases} \int_{W_2} f_{w_1}(\cdot) dQ(w_1, \cdot), & w_1 \in N'_1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine $m - \langle F, E \rangle$ -integrierbare Auswahlfunktion von ψ , d. h.

$$\int_{W_1} \psi dm \neq \emptyset.$$

zu (4): Wir prüfen für $\bar{\psi}$ die Voraussetzungen von (3.4) nach: $\bar{\psi}: W_1 \rightarrow \int_0^1 C(E)$ ist Ri-meßbar, denn es gilt:

$$h(x'; \bar{\psi}(w_1)) = h(x'; \psi(w_1)) = \begin{cases} 0 & ; w_1 \in N_1 \\ \int_{W_2} h(x'; \phi_{w_1}(\cdot)) dQ(w_1, \cdot); w_1 \in N_1'. \end{cases}$$

Nun wende man (4.1) (Ü.3) an, um zu sehen, daß Voraussetzung (i) aus (3.4) erfüllt ist. Für die $w_1 \in N_1$ ist $h(\cdot; \bar{\psi}(w_1))$ auf ganz F endlichwertig und stetig. Für die $w_1 \in N_1'$ folgt aus Voraussetzung (iv) und (v) die Bedingung (ii) aus (3.4). Da nach Voraussetzung (iii) $\forall x' \in U'$ $h(x'; \phi(\cdot, \cdot))$ P -integrierbar ist, ergibt sich aus (4.1) (Ü.3) die Bedingung (iii) aus (3.4).

Δ

(4.4) Bemerkung: Es bleibt hier die Frage offen, ob unter den Voraussetzungen des Satzes (4.3) in der Formel (ÜK.4) auf den Übergang zu den abgeschlossenen Hüllen verzichtet werden kann.

II. Kapitel: Ein Konkurrenzgleichgewichtsproblem

In diesem Kapitel wollen wir unter Verwendung der Ergebnisse aus dem I. Kapitel beweisen, daß in einer reinen Tauschwirtschaft mit beliebig vielen Wirtschaftssubjekten und beliebig vielen Warenarten, in der die Wirtschaftssubjekte nur subjektive Wahrscheinlichkeitsvorstellungen über ihre Erstaussstattung und die Gestalt der Menge ihrer möglichen Verbrauchspläne besitzen, ein "durchschnittliches" Konkurrenzgleichgewicht existiert.

§ 5: Heuristisches zum Modell einer Wirtschaft

Es sollen in diesem Paragraphen die wesentlichen in der Gleichgewichtsanalyse verwendeten Begriffe definiert und anschaulich erklärt werden. Wir erweitern hier das auf Debreu zurückgehende Modell einer Wirtschaft (vgl. etwa [14]). Dabei setzen wir voraus, daß alle mathematischen Größen, vor allem Integrale und Integralmengen, existieren. Genaue Bedingungen für die Existenz werden im nächsten Paragraphen gebracht.

Ausgangspunkt der Untersuchung ist eine reine Tauschwirtschaft, d. h. eine Wirtschaft, in der nicht produziert wird. Die Bestimmungsdaten einer solchen Wirtschaft $\mathfrak{E}$ sind gegeben durch:

- (I) Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$, die den Zeitraum, in dem getauscht werden darf, darstellen soll. I kann z. B. ein Intervall sein.
- (II) Eine Menge A , die Menge der Wirtschaftssubjekte oder Individuen, die mit einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ versehen ist, auf der ein Maß m definiert ist. Die Elemente B von $\mathcal{A}$ heißen Koalitionen, und $m(B)$ ist ein Maß für die

"Stärke" der Koalition B. Wir nennen $(A, \mathcal{O}, m)$ den Maßraum der Wirtschaftssubjekte.

- (III) Eine Menge T, die Menge der Warenarten oder Güterarten.
- (IV) Einen linearen Raum Z_1 , den Warenraum oder Raum der Warenvektoren, Warenbündel oder Güterbündel.
Dabei verstehen wir unter einem Warenvektor x eine Zuordnung $x:T \rightarrow \mathbb{R}$, in der $x(t)$ angibt, wieviel Maßeinheiten der Warenart t zum Warenbündel x gehören. Z_1 ist also ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^T$.
- (V) Einen linearen Raum Z_2 , den Preisraum oder Raum der Preisvektoren. Ein Preisvektor p ist eine Zuordnung $p:T \rightarrow \mathbb{R}$, in der $p(t)$ den Preis pro Einheit der Warenart t angibt. p heißt auch Preisniveau. Z_2 ist also ebenfalls ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^T$.
- (VI) Eine Funktion $u:A \times Z_1 \rightarrow \mathbb{R}$, wobei für jedes $a \in A$ $u(a, \cdot)$ die Nutzenfunktion des Individuums a ist, d. h. $u(a, x)$ soll ein Maß dafür sein, wie hoch a das Güterbündel x einschätzt.
(In der wirtschaftstheoretischen Literatur wird statt mit Nutzenfunktionen meist mit den allgemeineren Begriffen der Präferenzrelation gearbeitet. Es dürfte nicht zu schwierig sein, die hier gebrachten Resultate auf den allgemeineren Fall der Präferenzrelationen auszudehnen).
- (VII) Eine Abbildung $q:A \rightarrow Z_1$, die Quellen- oder Ressourcenzuweisung. $q(a)$ bezeichnet die "a priori" dem Wirtschaftssubjekt a zur Verfügung stehenden Quellen oder die Erstausstattung von a.
- (VIII) Eine Korrespondenz $X:A \rightarrow \mathcal{P}_0(Z_1)$, die Korrespondenz der Verbrauchsmöglichkeiten oder die Verbrauchsmengen-

korrespondenz. $X(a)$ ist die Menge der möglichen Verbrauchspläne des Wirtschaftssubjektes a . - Unter einem Verbrauchsplan des Wirtschaftssubjektes a verstehen wir einen Plan, in dem zu Beginn des Zeitraumes I für den gesamten Zeitraum I alle Inputs und Outputs von a festgelegt werden. Wir vereinbaren, den Input einer bestimmten Warenart durch eine positive, den Output durch eine negative reelle Zahl darzustellen. Nun ist es nicht möglich, z. B. mit dem für das kommende Jahr geplanten Input von 1 Kilogramm Kartoffeln jeden Tag des Jahres 10 Stunden hart zu arbeiten (Output). So ein Verbrauchsplan wäre unmöglich. - Uns interessieren nur die möglichen Verbrauchspläne eines Wirtschaftssubjektes.

Wir wollen eine durch die Punkte (I)...(VIII) beschriebene Wirtschaft eine deterministische Wirtschaft nennen. Ein bereits bekanntes Konzept der Gleichgewichtstheorie ist, für die Menge A eine Menge mit beliebig vielen Elementen zuzulassen (siehe etwa [4], [20]). Soll das Phänomen "vollständige Konkurrenz" behandelt werden, so bietet sich an, den Maßraum der Wirtschaftssubjekte als atomlos voranzusetzen. Das bedeutet gerade, daß kein Wirtschaftssubjekt für sich allein irgendeinen Einfluß ausüben kann. In diesem Fall ist, jedenfalls wenn $m \neq 0$ ist, A notwendig eine überabzählbare Menge. - Diese mathematische Formulierung des Sachverhaltes "vollständige Konkurrenz" stammt von R. J. Aumann, [2].

Erst in neuesten Arbeiten zur Gleichgewichtsanalyse (s.[7] und dort zitierte Aufsätze) wird für T nicht mehr vorausgesetzt, daß es nur endlich viele Elemente besitzt. Die Notwendigkeit, T möglichst allgemein zu wählen, entsteht dann,

wenn der Begriff Warenart weiter gefaßt wird. Die Waren werden nicht nur nach physikalischen Eigenschaften, sondern auch unter einem zeitlichen Aspekt unterschieden. Zum Beispiel wird Weizen, der in einer Woche zur Verfügung stehen soll, als eine andere Warenart angesehen als Weizen, der nächstes Jahr zur Verfügung stehen soll. Diese Unterscheidung trifft bereits Debreu in [14, chap. 2]. Dort wird das endliche Intervall I in endlich viele "Elementarintervalle" unterteilt, derart daß Waren mit identischen physikalischen Eigenschaften, die in demselben Elementarintervall zur Verfügung stehen sollen, als eine Warenart gelten. Dann kann T immer noch als endlich vorausgesetzt werden. - Folgende Gründe sprechen nun dafür, T beliebig zu wählen:

- (i) Soll die Analyse für Wirtschaften mit unendlichem Zeithorizont, etwa $I = [0, \infty[$ oder $I = \mathbb{N}$, durchgeführt werden, dann versagt das Debreu'sche Modell.
- (ii) Auch bei endlichem Zeithorizont ist es günstiger, sich nicht bei Beginn der Analyse auf eine feste Anzahl von Waren und eine feste Unterteilung festlegen zu müssen. Besonders in Globalmodellen - also Modellen einer Volkswirtschaft - kann bei beliebigem T der Vielfalt der Waren und ihrer physikalischen Eigenschaften, und dem sich wandelnden Bedürfnis, wann diese Waren zur Verfügung stehen sollen, Rechnung getragen werden.

Verzichtet man auf die Voraussetzung der Endlichkeit von T , so kann nicht mehr erwartet werden, daß Z_1 und Z_2 endliche Dimension besitzen. Um trotzdem noch zu sinnvollen Aussagen zu gelangen, fordern wir die Existenz einer Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $Z_2 \times Z_1$, vermöge der $\langle Z_2, Z_1 \rangle$ ein duales Paar wird. Für p aus Z_2 und x aus Z_1 nennen wir die reelle Zahl $\langle p, x \rangle$ den Wert des Warenvektors x bei dem Preisniveau p .

(5.1) Beispiele dualer Paare:

Die folgenden drei dualen Paare scheinen für die wirtschaftliche Interpretation, besonders im Hinblick auf den Begriff "Wert", geeignet.

a) Es seien T eine beliebige abstrakte Menge,

$Z_1 := l_T^0 := \{x: T \rightarrow \mathbb{R}, x(t) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } t \in T\}$
und $Z_2 := \mathbb{R}^T$. Durch die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : Z_2 \times Z_1 \rightarrow \mathbb{R}$
mit $\langle p, x \rangle = \sum_{t \in T} p(t)x(t)$ wird $\langle Z_2, Z_1 \rangle$ ein duales Paar.

b) Es seien $(T, \mathcal{T}, \mu)$ ein Maßraum, $Z_1 := L_{\mathbb{R}}^{\infty}(T, \mathcal{T}, \mu)$ und
 $Z_2 := L_{\mathbb{R}}^1(T, \mathcal{T}, \mu)$. (Wir identifizieren hier Äquivalenzklassen
und Repräsentanten in der üblichen Weise).

Durch die Bilinearform $\langle p, x \rangle = \int_T p(t)x(t)d\mu$ wird $\langle Z_2, Z_1 \rangle$ ein
duales Paar.

c) Es seien T das Intervall $[0, 1]$, $Z_1 := V_n^0[0, 1] := \{x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R};$
 $V(x, [0, 1]) < \infty\}$, (wobei $V(x, [0, 1]) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |x(t_i) - x(t_{i-1})|;$
 $t_i \in [0, 1] \text{ mit } t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1 \right\}$) und $Z_2 := C_0[0, 1] :=$
 $= \{x': [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x' \text{ stetig}\}$. Bezüglich der Bilinearform
 $\langle p, x \rangle := \int_0^1 p(t)dx(t)$ (Lebesgue-Stieltjes-Integral) ist

$\langle Z_2, Z_1 \rangle$ ein duales Paar.

In unserem Wirtschaftsmodell soll noch ein weiteres Phänomen berücksichtigt werden: Bei großen Zeiträumen werden die Wirtschaftssubjekte keine exakte Kenntnis mehr darüber besitzen, welche Ressourcen ihnen zu jedem Zeitpunkt zur Verfügung stehen, und welche Verbrauchspläne tatsächlich zu jedem Zeitpunkt möglich sein werden. Das Individuum sieht sich mit dem Unsicherheitsphänomen konfrontiert.

Da es noch kein Konzept gibt, das dieses Problem der Unsicherheit zufriedenstellend löst, - Lösungsvorschläge finden sich in [14, chap. 7], [30], [33] und [8] -, stellen wir

hier ein weiteres Modell einer zufallsabhängigen Wirtschaft zur Diskussion:

Die Bestimmungsdaten einer zufallsabhängigen Wirtschaft $\mathcal{Z}$ sind durch die Punkte (I)...(VI) wie bei der deterministischen Wirtschaft $\mathcal{E}$ gegeben und weiter durch:

- (IX) Eine Menge W , die Menge der Naturzustände, versehen mit der σ -Algebra $\mathcal{A}$ der Ereignisse in W .
- (X) Eine Übergangswahrscheinlichkeit Q von $(A, \mathcal{A})$ nach $(W, \mathcal{A})$, (vgl. § 4), wobei $Q(a, \cdot)$ die subjektive Wahrscheinlichkeitsvorstellung von a über das Eintreten der Ereignisse aus $\mathcal{A}$ ausdrücken soll.
- (VII z) Eine Abbildung $q_0: A \times W \rightarrow Z_1$, die zufallsabhängige Quellenzuweisung; $q_0(a, w)$ ist die Erstausrüstung von a bei Eintritt des Naturzustandes w .
- (VIII z) Eine Korrespondenz $X_0: A \times W \rightarrow \mathcal{P}_0(Z_1)$, die zufallsabhängige Verbrauchsmengenkorrespondenz; $X_0(a, w)$ ist die Menge der möglichen Verbrauchspläne von a bei Eintritt des Naturzustandes w .

Eine deterministische Wirtschaft ist ein Spezialfall einer so definierten zufallsabhängigen Wirtschaft.

Wir setzen nun das folgende Verhalten der Wirtschaftssubjekte in der zufallsabhängigen Wirtschaft $\mathcal{Z}$ voraus:

Jedes Wirtschaftssubjekt bestimme sich seine durchschnittlich zu erwartende Erstausrüstung $q(a) := \int_W q_0(a, \cdot) dQ(a, \cdot)$

und seine durchschnittlich zu erwartende Verbrauchsmenge $X(a) := \int_W X_0(a, \cdot) dQ(a, \cdot)$. Dann maximiere es bei gegebenem

Preisniveau p seinen Nutzen unter Berücksichtigung seiner durchschnittlich zu erwartenden physischen Fähigkeiten, beschrieben durch $X(a)$, und seines durchschnittlich zu erwartenden Einkommens, beschrieben durch $\langle p, q(a) \rangle$. D. h. das

Wirtschaftssubjekt a sucht in der Budgetmenge

$\gamma(a, p) := \{x \in X(a) : \langle p, x \rangle \leq \langle p, q(a) \rangle\}$ die Warenvektoren x mit $u(a, x) = \sup_{x \in \gamma(a, p)} u(a, x)$ ¹⁾. Die Menge $u(a, p) = \{x \in \gamma(a, p) : u(a, x) = \sup_{x \in \gamma(a, p)} u(a, x)\}$ ist dann die Nachfragemenge von a bei dem Preisniveau p .

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß es, wenn jedes Wirtschaftssubjekt bei jedem gegebenen Preisniveau p in der beschriebenen Weise verfährt, unter sehr allgemeinen Bedingungen über A, T, Z_1, Z_2 und bei endlichem W ein Preisniveau $p^* \neq 0$ gibt, das den "Markt klärt"; d. h. zu diesem p^* gibt es eine Allokation f^* - das ist eine Abbildung $f^*: A \rightarrow Z_1$ mit $\int_A f^* dm = \int_A q dm$ - so daß für m -fast alle $a \in A$ $f^*(a)$ in $U(a, p^*)$ liegt.

Im Spezialfall einer deterministischen Wirtschaft $\mathcal{E}$ heißt ein Paar (p^*, f^*) mit den angegebenen Eigenschaften ein Konkurrenzgleichgewicht von $\mathcal{E}$. Im allgemeinen Fall wollen wir das Paar (p^*, f^*) ein durchschnittliches Konkurrenzgleichgewicht nennen.

Bei der Interpretation eines durchschnittlichen Konkurrenzgleichgewichtes ist noch zu beachten, daß die Allokation f^* für die Wirtschaftssubjekte a Warenvektoren $f^*(a)$ liefern kann, die nicht mehr in die "wahre" Budgetmenge $\gamma(a, \bar{w}, p^*) = \{x \in X_0(a, \bar{w}) : \langle p^*, x \rangle \leq \langle p^*, q_0(a, \bar{w}) \rangle\}$ fallen, wenn $\bar{w}$ der "wahre" Naturzustand ist. In diesem Fall hat sich das Individuum a übernommen, finanziell (falls $\langle p^*, f^*(a) \rangle > \langle p^*, q_0(a, \bar{w}) \rangle$) oder physisch (falls $f^*(a) \notin X_0(a, \bar{w})$). An diesem Punkt müßten Untersuchungen über Risikominimierung, mehrstufige Entscheidung, Optimalität und Stabilität einsetzen.

1) $\sup_{x \in \gamma(a, p)} u(a, x)$

Fassen wir noch einmal die wichtigsten Begriffe dieses Paragraphen in einer Definition zusammen:

- (5.2) Definition: a) Eine deterministische Wirtschaft $\mathcal{E}$ ist ein Tupel $[(A, \mathcal{A}, m), \langle Z_2, Z_1 \rangle, u, q, X]$ mit den in den Punkten (II), (IV), (V), (VI), (VII), (VIII) beschriebenen Eigenschaften.
- b) Eine zufallsabhängige Wirtschaft $\mathcal{Z}$ ist ein Tupel $[(A, \mathcal{A}, m), (W, \mathcal{A}), Q, \langle Z_2, Z_1 \rangle, u, q_0, X_0]$ mit den in den Punkten (II), (IV), (V), (VI), (VII z), (VIII z), (IX), (X) beschriebenen Eigenschaften und mit:
(J): Das duale Paar $\langle Z_2, Z_1 \rangle$ sei $\forall a \in A$ vom Typ $J-(W, \mathcal{A}, Q(a, \cdot))$.
- c) Die aus $\mathcal{Z}$ durch Erwartungswertbildung gewonnene deterministische Wirtschaft $\tilde{\mathcal{Z}}$ ist das Tupel $[(A, \mathcal{A}, m), \langle Z_2, Z_1 \rangle, u, q, X]$, wobei q durch $q(a) := \int_W q_0(a, \cdot) dQ(a, \cdot)$ und X durch $X(a) := \int_W X_0(a, \cdot) dQ(a, \cdot)$ mit $(A, \mathcal{A}, m), \langle Z_2, Z_1 \rangle, (\tilde{W}, \mathcal{A}), Q, u, q_0, X_0$ aus b) erhalten wird.
- d) Die Budgetrestriktionskorrespondenz $\gamma: AxZ_2 \rightarrow \mathcal{P}_0(Z_1)$ ist durch $\gamma(a, p) := \{x \in X(a) : \langle p, x \rangle \leq \langle p, q(a) \rangle\}$ definiert.
- e) Die Nachfragekorrespondenz ist für alle $p \in R := \{p \in Z_2 : \text{es existiert } \sup u(a, \gamma(a, p)) \forall a \in A\}$ definiert:
 $U: A \times R \rightarrow \mathcal{P}_0(Z_1)$ mit $U(a, p) := \{x \in \gamma(a, p) : u(a, x) = \sup u(a, \gamma(a, p))\}$.

- f) Eine Allokation ist eine m - $\langle Z_2, Z_1 \rangle$ -integrierbare Abbildung $f: A \rightarrow Z_1$ mit
- $$\int_A f dm = \int_A q dm.$$
- g) Ein Konkurrenzgleichgewicht einer deterministischen Wirtschaft $\mathcal{E}$ ist ein Paar (p^*, f^*) , für das gilt:
- (K.1) $p^* \in R, p^* \neq 0$
- (K.2) $f^*: A \rightarrow Z_1$ ist Allokation
- (K.3) für m -fast alle $a \in A$ liegt $f^*(a)$ in $U(a, p^*)$.
- h) Ein Quasi-Konkurrenzgleichgewicht einer deterministischen Wirtschaft $\mathcal{E}$ ist ein Paar (p^*, f^*) , für das die Bedingungen (K.1), (K.2) und
- (K.3)*: für m -fast alle $a \in A$ ist $f^*(a) \in \gamma(a, p^*)$ und es gilt:
- falls 1) $\inf \langle p^*, X(a) \rangle \geq \langle p^*, q(a) \rangle$, ist $\langle p^*, f^*(a) \rangle = \langle p^*, q(a) \rangle$,
- falls 2) $\inf \langle p^*, X(a) \rangle < \langle p^*, q(a) \rangle$, ist $f^*(a) \in U(a, p^*)$
- erfüllt sind.
- i) Ein durchschnittliches (Quasi-)Konkurrenzgleichgewicht einer zufallsabhängigen Wirtschaft $\mathcal{Z}$ ist ein (Quasi-)Konkurrenzgleichgewicht der aus $\mathcal{Z}$ durch Erwartungswertbildung gewonnenen deterministischen Wirtschaft $\bar{\mathcal{Z}}$.

Ist das Paar (p^*, f^*) ein Konkurrenzgleichgewicht, so ist es auch ein Quasi-Konkurrenzgleichgewicht. Die umgekehrte Implikation gilt nur für spezielle Wirtschaften. Eine Diskussion darüber findet man etwa in [15] oder in [20]. Das

einfachste Beispiel einer Wirtschaft, in der die umgekehrte Implikation gilt, erhält man, wenn man " $X(a)$ konvex und $q(a) \in \text{int } X(a)$ " für m -fast alle $a \in A$ voraussetzt.

Anschaulich bedeutet ein Quasi-Konkurrenzgleichgewicht (p^*, f^*) , daß sich die Wirtschaftssubjekte, deren Einkommen $\langle p^*, q(a) \rangle$ nicht höher als ihre jemals bei einem Tausch zu erreichende untere Ausgabengrenze $\inf \langle p^*, X(a) \rangle$ ist, bereits mit solchen Warenvektoren zufrieden geben, deren Wert ihrem Einkommen entspricht. Sie versuchen in dieser Situation nicht mehr eine Nutzenmaximierung. - Auf diese Art erhalten wir eine geglättete Nachfragekorrespondenz

$U_1: A \times R \rightarrow \mathcal{P}_0(Z_1)$ mit

$$U_1(a, p) := \begin{cases} U(a, p) & , \text{ falls } \inf \langle p, X(a) \rangle < \langle p, q(a) \rangle \\ \{x \in Y(a, p) : \langle p, x \rangle = \langle p, q(a) \rangle\} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann können wir (K.3)* anders formulieren:

"Für m -fast alle $a \in A$ ist $f^*(a) \in U_1(a, p^*)$ ".

Da beim Beweis der Existenz eines Gleichgewichts die äußere Stetigkeit der Nachfragekorrespondenz eine entscheidende Rolle spielen wird, U aber nicht nach außen stetig zu sein braucht (siehe [14, chap. 4]), arbeiten wir, gemäß einem Vorschlag von Debreu, [15], mit der geglätteten Nachfragekorrespondenz U_1 , deren äußere Stetigkeit gezeigt werden kann. Damit können wir jedoch dann nur die Existenz eines Quasi-Konkurrenzgleichgewichtes sicherstellen.

§ 6: Die mathematischen Voraussetzungen und ihre wirtschaftstheoretische Motivierung

Wir wollen in diesem Paragraphen alle mathematischen Begriffe und Voraussetzungen, die zum Beweis des Satzes der Existenz eines Konkurrenzgleichgewichts benötigt werden, einführen. Außerdem sollen bereits einfache Folgerungen aus den Voraussetzungen gezogen werden, und es soll versucht werden, die Voraussetzungen wirtschaftstheoretisch zu rechtfertigen.

(V.1) Der Maßraum $(A, \mathcal{A}, m)$ der Wirtschaftssubjekte sei endlich und bezüglich des Maßes m vollständig.

(V.2) Es sei W endlich, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(W)$ und ν das durch m und die Übergangswahrscheinlichkeit Q eindeutig definierte Maß auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ mit $\nu(B \times M) = \int_B Q(\cdot, M) dm \quad \forall B \in \mathcal{A}, M \in \mathcal{A}$, (vgl. (4.1)).

(V.3) Für das duale Paar $\langle Z_2, Z_1 \rangle$ mögen die folgenden Voraussetzungen gelten:

(a) Es gebe auf Z_2 eine Topologie τ_2 , die bezüglich des dualen Paares $\langle Z_2, Z_1 \rangle$ zulässig ist, und so daß (Z_2, τ_2) ein separabler Fréchetraum (d.h. lokalkonvex, metrisierbar und vollständig) wird.

(b) Wenn nichts anderes vermerkt wird, sei Z_1 mit der schwachen Topologie $\sigma(Z_1, Z_2)$ versehen.

(c) Auf Z_2 existiere ein stumpfer konvexer Kegel Z_2^+ , derart daß

$$(\alpha) \quad Z_2 = Z_2^+ - Z_2^+$$

$$(\beta) \quad \text{int } Z_2^+ \neq \emptyset$$

(d) Mit Z_1^+ bezeichnen wir den zu Z_2^+ dualen Kegel, also $Z_1^+ := \{x \in Z_1 : \langle x', x \rangle \geq 0 \quad \forall x' \in Z_2^+\}$.

Durch die Forderung an (Z_2, τ_2) , ein Fréchetraum zu sein, und durch (V.3) (c) (α) ergeben sich die folgenden beiden Eigenschaften:

- (6.1) Für jeden Maßraum $(S, \mathcal{F}, \mu)$ ist das duale Paar $\langle Z_2, Z_1 \rangle$ vom Typ J- $(S, \mathcal{F}, \mu)$, (vgl. (3.1)), und eine Abbildung $f: S \rightarrow Z_1$ ist genau dann μ - $\langle Z_2, Z_1 \rangle$ -integrierbar, wenn $\forall x' \in Z_2^+$ die Funktionen $\langle x', f(\cdot) \rangle$ μ -integrierbar sind.
- (6.2) In Z_1 sind die folgenden Klassen von Mengen identisch:
- (i) Die schwach beschränkten Mengen.
 - (ii) Die stark beschränkten Mengen.
 - (iii) Die $\mathcal{G}(Z_1, Z_2)$ -relativ-kompakten Mengen.
 - (iv) Die $\mathcal{F}_2$ -gleichstetigen Mengen.

Beweis:

[23], § 21.5 (4)

Δ

Beispiele dualer Paare, die die Voraussetzungen aus (V.3) erfüllen, sind die in (5.1) b) und c) gebrachten dualen Paare $\langle L_{\mathbb{R}}^1(T, \mathcal{F}, \mu), L_{\mathbb{R}}^\infty(T, \mathcal{F}, \mu) \rangle$, falls die σ -Algebra $\mathcal{F}$ abzählbar erzeugt ist, also etwa wenn $(T, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \lambda^n)$ mit $n \geq 1$, und $\langle C_0[0,1], V[0,1] \rangle$. Dabei sei $L_{\mathbb{R}}^1(\cdot)$ mit der Norm $\|x'\|_1 := \int_T |x'(t)| d\mu$ und $C_0[0,1]$ mit der Norm

$\|x'\|_0 := \sup_{t \in [0,1]} |x'(t)|$ ausgestattet. Im 1. Fall kann als

Z_2^+ die Menge $\{x' \in L_{\mathbb{R}}^1(\cdot); \int_T x'(t) d\mu \geq 0\}$ und im 2. Fall die

Menge $\{x' \in C_0[0,1]; x'(t) \geq 0 \forall t \in [0,1]\}$ gewählt werden;

(α) und (β) sind dann erfüllt.

(V.4) Für die zufallsabhängige Verbrauchsmengenkorrespondenz

X_0 gelte:

(a) $X_0: A \times W \rightarrow \mathcal{F}_c(Z_1)$

(b) X_0 ist $\mathcal{R}_i$ -meßbar bezüglich $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

(c) $\forall (a, w) \in A \times W$ ist $X_0(a, w)$ Z_2^+ -beschränkt.

- (d) $\forall (a,w) \in A \times W$ ist die Z_2^+ -Hülle $H_0(a,w)$ von $X_0(a,w) \in (Z_1, Z_2)$ -kompakt.
 (e) Die Z_2^+ -Hüllen Korrespondenz H_0 von X_0 ist R_i -integrierbar bezüglich v .

Die Voraussetzungen (a) und (b) werden üblicherweise über eine Verbrauchsmengenkorrespondenz gemacht, siehe etwa [20]. Denkt man bei den Voraussetzungen (c) und (d) an das Beispiel (5.1) c), so lassen sie sich dahingehend interpretieren, daß ein Wirtschaftssubjekt, was auch immer für ein Naturzustand eintreten möge, nicht beliebig große negative Beträge von einer Warenart verbrauchen darf. Erinnern wir uns, daß durch negative Zahlen der Output wiedergegeben werden sollte, so heißt das also, daß jedes Wirtschaftssubjekt nicht beliebig viel Output anbieten darf bzw. kann. Im endlichdimensionalen Fall forderte man statt (c) und (d) die Existenz einer normintegrierbaren Minorante, [20]. - Die Voraussetzung (e) wird aus technischen Gründen benötigt.

Aus (V.1)...(V.4) können wir folgern:

(6.3): Die Korrespondenz X_0 erfüllt die Voraussetzungen zu (4.3).

Beweis:

In (4.3) setzen wir $(W_1, \mathcal{A}_1) := (A, \mathcal{A})$, $(W_2, \mathcal{A}_2) := (W, \mathcal{A})$
 $P := v$, $E := Z_1$, $F := Z_2$. Dann gilt:

(i) ist (V.4) (b); (ii) folgt aus (V.4) (c); wegen (V.3) (c) (α) ist $\text{int } Z_2^+ \neq \emptyset$; setzen wir also $U' := \text{int } Z_2^+$, so folgt aus (V.4) (e) die Bedingung (iii). Durch (Ü.2) ergibt sich daraus mit $N_1 := \emptyset$ die Bedingung (iv). (v) folgt mit Hilfe von (3.13).

(V.5) Für die zufallsabhängige Quellenzuweisung q_0 gelte:

(a) $q_0: A \times W \rightarrow Z_1$ ist $v\text{-}\langle Z_2, Z_1 \rangle$ -integrierbar.

(b) Für alle $a \in A$ sei $q(a) = \int_W q_0(a, \cdot) dQ(a, \cdot) \in X(a)$.

Die Bedingung (a) ist technischer Natur. Aus (a) folgt sofort:

(6.4): Die Abbildung $q: A \rightarrow Z_1$ mit

$$q(a) = \int_W q_0(a, \cdot) dQ(a, \cdot), a \in A$$

ist $m\text{-}\langle Z_2, Z_1 \rangle$ -integrierbar.

Beweis:

folgt sofort aus (4.2), (ÜV.3).

Δ

Durch die Voraussetzung (b) wird sichergestellt, daß für alle $a \in A$ die Budgetrestriktionsmenge für jedes Preisniveau p nichtleer ist. Anschaulich bedeutet (b): die Erstaussstattung eines Wirtschaftssubjektes ist ein möglicher Verbrauchsplan. Bei jedem Naturzustand, für den das gilt, ist es also erlaubt, sich gar nicht am Tausch zu beteiligen.

(V.6) Für beliebige konvexe Kegel K in Z_1 mit Spitze 0 definieren wir:

(a) $X^K: A \rightarrow \mathcal{P}_0(Z_1)$, durch

$$X^K(a) = \{x \in X(a) : \exists f \in L(X) \text{ mit } x = f(a) \text{ und } \int_A (q - f) dm \in K\};$$

und wir fordern:

(b) $\forall$ abgeschlossenen konvexen Kegel K in Z_1^+ mit Spitze 0 sei X^K Ri-meßbar.

Da $0 \in K$ sein soll, ist wegen (V.5) (b) $X^K(a) \neq \emptyset \forall a \in A$. Außerdem bestätigt man ohne weiteres die Konvexität jeder Menge $X^K(a)$.

Zur Verdeutlichung der Mengen $X^K(a)$ erinnere man sich daran, daß durch K auf Z_1 eine Ordnung $\leq^K$ mit $x \leq^K y: \Leftrightarrow y-x \in K$ gegeben wird. Ist $K = \{0\}$, so ist $X^K(a)$ gerade die "Projektion" der Menge der Allokationen auf die Menge $X(a)$. Ist $K = Z_1^+$ gemäß der Bemerkung nach (6.2), dann sind die Elemente aus $X^K(a)$ die Warenbündel aus $X(a)$, zu denen es eine Zuweisung $f: A \rightarrow Z_1$ gibt, deren Gesamtbetrag $\int_A f dm$ den bei der Quellenzuweisung $\int_A q dm$ entstehenden Gesamtbetrag nicht übersteigt - in dem Sinne: $\langle x', \int_A f dm \rangle \leq \langle x', \int_A q dm \rangle \forall x' \in Z_2^+$ - und für den $f(a)$ gerade das fragliche Warenbündel ist.

Die Voraussetzung (V.6) (b) benötigen wir, um die Beschränktheit der Mengen $X^K(a)$ für die $K \subset Z_1^+$ zeigen zu können. Wählt man α genügend fein, etwa $\alpha = \mathcal{P}(A)$, so ist diese Bedingung sicher erfüllt.

(V.7) Für die Nutzenfunktion $u: A \times Z_1 \rightarrow \mathbb{R}$ gelte:

(a) $\forall a \in A$ sei $u(a, \cdot) \in \mathcal{C}(Z_1, Z_2)$ -stetig und konkav.

(b) $\forall x \in Z_1$ sei $u(\cdot, x)$ α -meßbar.

(c) Zu jedem $f_1 \in L(X_1^{Z_1})$ gebe es ein $f_2 \in L(X)$, so daß $u(a, f_2(a)) > u(a, f_1(a))$ für m -fast alle $a \in A$.

Wir bemerkten bereits in § 5, daß wir uns hinsichtlich der Präferenzen der Wirtschaftssubjekte um keine volle Allgemeinheit bemühen. Wahrscheinlich kann - mit etwas größerem Aufwand - das Resultat dieser Arbeit auch für Präferenzrelationen erhalten werden, die durch keine konkave Nutzenfunktion dargestellt werden können. Dagegen dürften die Stetigkeit und die Meßbarkeit aus technischen Gründen auf jeden Fall benötigt werden.

Die Voraussetzung (V.7) (c) besagt anschaulich, daß kein Wirtschaftssubjekt schon von vornherein mit einem Warenbündel zufrieden ist, das es durch eine Zuweisung f mit

$\int_A f dm \leq \int_A q dm$ erhält, und läßt sich durch praktische Erfahrungen rechtfertigen.

(V.8) (a) Wir definieren die Menge $E := \{ \int_A (f-q) dm; f \in L(X) \text{ mit } u(a, f(a)) > \sup_{Z_1^+} u(a, X^{-1}(a)) \text{ für } m\text{-fast alle } a \in A \}$

(b) Es sei $E \subset Z_1^+$.

(c) Bezüglich der Topologie $\mathcal{G}(Z_1, Z_2)$ auf Z_1 gebe es in E innere Punkte, d. h. $\text{int } E \neq \emptyset$.

(d) Der "Überschußkegel" C ist definiert als $C := \text{cone } E$.

(e) C sei $\mathcal{G}(Z_1, Z_2)$ -abgeschlossen.

Die in (a) definierte Menge E besteht aus den Warenbündeln, um die das Gesamtangebot $\int_A q dm$ und der Gesamtverbrauch $\int_A f dm$ für Zuweisungen f differieren, die allen Wirtschaftssubjekten Warenvektoren $f(a)$ zuweisen, die sie mehr begehren als jeden bei einer Z_1^+ -erreichbaren Zuweisung erhaltenen Warenvektor $x \in X^{-1}(a)$. Daher ist (b) eine vernünftige Forderung. Die Voraussetzung (c) wird nur aus mathematischen Gründen aufgenommen. Es bleibt zu überlegen, wie (c) abgeschwächt werden kann. Wir werden jedenfalls zeigen, daß E nichtleer ist, ohne (c) dabei heranzuziehen.

Selbst wenn sich E als abgeschlossen herausstellt, muß der von E erzeugte Kegel C nicht abgeschlossen sein; - ein Beispiel in $\mathbb{R}^2$ findet man in [23], § 16.5. Trotzdem ist

(e) keine große Beschränkung, wenn einmal (c) erfüllt ist. Ist nämlich C noch nicht abgeschlossen, so "verkleinere" man C so, daß es immer noch innere Punkte enthält und die abgeschlossene Hülle im ursprünglichen C enthalten ist.

Schließlich halten wir noch fest:

$$(6.5) \quad C = \bigcup_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda \geq 0}} \lambda E$$

Beweis:

Wir zeigen die Konvexität von E , woraus (6.5) sofort folgt, vgl. etwa [23], § 16.5(2).

Sei o.B.d.A $E \neq \emptyset$. Wir wählen $x_1, x_2 \in E$ und $\alpha \in]0, 1[$.

Dann gibt es $f_1, f_2 \in L(X)$ mit $u(a, f_i(a)) > \sup u(a, X^{Z_1^+}(a))$ für m -fast alle $a \in A$, $i=1, 2$ und $\int_A (f_i - q) dm = x_i$.

Mit $f = \alpha f_1 + (1-\alpha)f_2$ ist $\int_A (f - q) dm = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$. f liegt in $L(X)$ und wegen (V.7) (a) ist $u(a, f(a)) > \sup u(a, X^{Z_1^+}(a))$.

Δ

Die Voraussetzungen (V.6), (V.7) und (V.8) sind so zu verstehen: "Wenn die Korrespondenz X und die Funktion q existieren und integrierbar sind, dann seien die genannten Bedingungen erfüllt". Die Existenz von X und q folgt aus (6.3) und (V.5) (a), während die Au -Integrierbarkeit von X sich als Folge von (6.3) aus (4.3) (ÜK.3) und die m - $\langle Z_2, Z_1 \rangle$ -Integrierbarkeit von q aus (6.4) ergibt.

§ 7: Der Existenzsatz für das Konkurrenzgleichgewicht

In diesem Paragraphen formulieren wir den Satz über die Existenz eines durchschnittlichen Quasi-Konkurrenzgleichgewichtes in einer zufallsabhängigen Wirtschaft und beweisen ihn.

(7.1) Satz: Die zufallsabhängige Wirtschaft

$\mathcal{Z} = [(A, \alpha, m), (W, \alpha), Q, \langle Z_2, Z_1 \rangle, u, q_0, x_0]$
 erfülle die in § 6 in den Punkten (V.1)...(V.8) aufgeführten Voraussetzungen. Dann existiert ein durchschnittliches Quasi-Konkurrenzgleichgewicht (p^*, f^*) .

A. Beweisskizze

Der Beweis von (7.1) besteht aus 6 Teilen:

Im 1. Teil zeigen wir, daß aus der zufallsabhängigen Wirtschaft $\mathcal{Z}$ die zugehörige deterministische Wirtschaft $\bar{\mathcal{Z}}$ gebildet werden kann und daß für $\bar{\mathcal{Z}}$ die Voraussetzungen (V.1), (V.3), (V.4), (V.5), (V.6), (V.7), (V.8) erfüllt sind, wobei:

(V.4): Für die durchschnittlich zu erwartende Verbrauchsmengenkorrespondenz X gilt:

- (a) $X: A \rightarrow f_c(Z_1)$.
- (b) X ist Ri-meßbar und Au-integrierbar bezüglich m .
- (c) $\forall a \in A$ ist $X(a)$ Z_2^+ -beschränkt.

(V.5): Für die durchschnittlich zu erwartende Quellenzuweisung q gilt:

- (a) $q: A \rightarrow Z_1$ ist m - $\langle Z_2, Z_1 \rangle$ -integrierbar.
- (b) Für alle $a \in A$ ist $q(a) \in X(a)$.

Im 2. Teil untersuchen wir für einen abgeschlossenen konvexen Kegel $K \subset Z_1^+$ mit Spitze 0 die Mengen $X^K(a)$ und den Überschußkegel C .

Wir zeigen die Ri-Integrierbarkeit von X^K , woraus die schwache Beschränktheit von $X^K(a)$ für m-fast alle $a \in A$ folgt, und, daß $L(X^K) = L(\overline{X^K}) \neq \emptyset$ ist. Die letzte Tatsache gestattet es, statt mit X^K mit der kompaktwertigen Korrespondenz $\overline{X^K}$ zu arbeiten. Schließlich beweisen wir noch, ohne (V.8) (c) heranziehen zu müssen, daß E nichtleer ist.

Im 3. Teil definieren wir als Preisvariationsmenge P eine konvexe, $\mathcal{G}(Z_2, Z_1)$ -kompakte Teilmenge des zu C dualen Kegels C' , nämlich:

$$P := \{p \in C' : \langle p, z_0 \rangle = 1\},$$

wobei z_0 ein fester Punkt aus $\text{int } C$ ist. So ein z_0 existiert wegen (V.8) (c).

Wir bemerken, daß $0 \notin P$ ist. Finden wir also in P ein p^* mit (K.2) und (K.3)*, dann ist p^* ein Quasi-Konkurrenzgleichgewichtspreis.

Im 4. Teil beweisen wir, daß die zu dem dualen Paar $\langle Z_2, Z_1 \rangle$ gehörende Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$, eingeschränkt auf $P \times Z_1$, bezüglich der Produkttopologie $\mathcal{G}(Z_2, Z_1) \wedge P \otimes \mathcal{G}(Z_1, Z_2)$ stetig ist.

Im 5. Teil konstruieren wir unter der Zusatzvoraussetzung, daß X Ri-integrierbar bezüglich m und $\mathcal{G}(Z_1, Z_2)$ -kompaktwertig ist, ein Paar $(\bar{p}, \bar{f}) \in P \times L(X^C)$, so daß für m-fast alle $a \in A$ $\bar{f}(a) \in U_1(a, \bar{p})$, wobei U_1 die geglättete Nachfragekorrespondenz ist, vgl. § 5.

Im einzelnen werden die folgenden Schritte durchgeführt:

1. und 2. Schritt: Die Stetigkeit von $\gamma(a, \cdot): P \rightarrow L_c(X(a))$.
3. Schritt: Die äußere Stetigkeit von $U_1(a, \cdot): P \rightarrow L_c(X(a))$.

4. Schritt: Die Au-Integrierbarkeit von $U_1(\cdot, p): A \rightarrow \mathcal{I}_c(Z_1)$.

5. Schritt: Anwendung eines Fixpunktsatzes liefert $(\bar{p}, \bar{f})$.

Im 6. Teil betrachten wir eine abzählbare Nullumgebungs-basis $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (Z_2, τ_2) . Wir setzen $Z_1^{(n)} := V_n^0$. Jedes $Z_1^{(n)}$ ist $\mathcal{G}(Z_1, Z_2)$ -kompakt (Satz von Bourbaki-Alaoglu; etwa [23], § 20,9(4)) und es ist $Z_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_1^{(n)}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfüllt die Korrespondenz $X_n: A \rightarrow \mathcal{I}_c(Z_1)$, definiert durch $X_n(a) := (q(a) + Z_1^{(n)}) \cap X(a)$ die Voraussetzungen des 5. Teils.

Daher gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Paar $(p_n, f_n) \in \text{PxL}(X^C)$, so daß für m-fast alle $a \in A$ $f_n(a) \in U_1^{(n)}(a, p_n)$, wobei $U_1^{(n)}$ aus X_n entsteht wie U_1 aus X .

Aus der so konstruierten Folge $((p_n, f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in $\text{PxL}(X^C)$ sondern wir eine Teilfolge aus. Als Gleichgewichtspreis p^* ergibt sich der Grenzwert der Teilfolge von $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die zugehörige Warenzuweisung f^* erhält man als Auswahl-funktion der Korrespondenz

$$A \ni a \mapsto \overline{co} \, cl \, (f_n(a))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_c(Z_1).$$

Man weiß dann, daß $(p^*, f^*) \in \text{PxL}(X^C)$ ist. Daraus schließen wir auf " $f^*(a) \in U_1(a, p^*)$ für m-fast alle $a \in A$ ", d. h. auf (K.3)*. Mit Hilfe der Eigenschaften des Kegels C folgt schließlich, daß $f^* \in L(X^{\{0\}})$, was gerade (K.2) ist.

B. Die Durchführung des Beweises

Behauptung 1: Es existiert die aus $\mathcal{Z}$ gewonnene deterministische Wirtschaft $\bar{\mathcal{Z}}$ und für $\bar{\mathcal{Z}}$ gelten (V.1), (V.3), (V.4), (V.5), (V.6), (V.7), (V.8).

Beweis:

Die Existenz von $\bar{\mathcal{Z}}$ folgt sofort aus (6.3) und (V.5) (a). Die Bedingungen (V.1), (V.3), (V.6), (V.7), (V.8) sind für $\bar{\mathcal{Z}}$

automatisch erfüllt; (vgl. die Bemerkung im Anschluß an (6.5)). $\overline{(V.4)}$ (a) und (c) ergeben sich aus (3.13) und $\overline{(V.4)}$ (b) aus (4.3) (ÜK.3). $\overline{(V.5)}$ (a) zeigten wir in (6.4), während $\overline{(V.5)}$ (b) genau die Voraussetzung (V.5) (c) ist. Δ

Behauptung 2: Es sei $K \subset Z_1^+$ ein konvexer abgeschlossener Kegel mit Spitze 0. Dann gilt:

- a) Die Korrespondenz $X^K: A \rightarrow \mathcal{F}_c(Z_1)$, definiert durch $X^K(a) := \overline{X^K(a)}$ erfüllt die Voraussetzungen von (3.4).
- b) X^K ist Ri-integrierbar bezüglich m.
- c) Für m-fast alle $a \in A$ ist $X^K(a)$ schwach beschränkt.
- d) X^K ist Au-integrierbar und $L(\overline{X^K}) = L(X^K)$.
- e) Die Menge E ist nichtleer, (das wird ohne (V.8) (c) gezeigt!).

Beweis von a):

Nach Voraussetzung (V.6) (b) ist $\overline{X^K}$ Ri-meßbar. Da $\forall a \in A$ $X^K(a) \subset X(a)$ und für X $\overline{(V.4)}$ (c) gilt, ist auch $\overline{X^K}$ Z_2^+ -beschränkt. Die Bedingung (iii) aus (3.4) ergibt sich aus der $\forall x' \in Z_2^+$ gültigen Abschätzung.

$$(1) \quad h(x'; X(a)) \leq h(x'; X^K(a)) \leq \langle x', q(a) \rangle,$$

und daraus, daß $\forall x' \in Z_2^+$

$$(2) \quad h(x'; X(a)) = h(x'; H(a)) = \int_W h(x'; H_0(a, \cdot)) dQ(a, \cdot)$$

und somit $h(x'; X(\cdot))$ infolge (4.1) (Ü.3) m-integrierbar ist.

Beweis von b):

Wegen (1) und (2) ist $\forall x' \in Z_2^+$ $h(x'; X^K(\cdot))$ m-integrierbar. Da sich jedes $x' \in Z_2$ als $x' = x'_1 - x'_2$ mit $x'_1, x'_2 \in Z_2^+$ darstellen läßt, und da wir die Ungleichung

(3) $\langle x', q(a) \rangle \geq h(x'; X^K(a)) \geq h(x'_1; X^K(a)) + h(-x'_2; X^K(a))$ haben, bleibt zu zeigen, daß $\forall x' \in -Z_2^+$ $h(x'; X^K(\cdot))$ m-inte-

grierbar ist.

Nach (3.4) (Weg 3) ist

$$\int_A h(x'; X^K(\cdot)) dm = h(x'; \int_A X^K dm)$$

Da für $x' \in -Z_2^+ C -K'$

$$\langle x', x \rangle \geq \langle x', \int_A q dm \rangle \quad \forall x \in \int_A X^K dm \text{ gilt,}$$

andererseits aber $\int_A q dm$ in $\int_A X^K dm$ liegt, ist $\forall x' \in -Z_2^+$

$$\int_A h(x'; X^K(\cdot)) dm = \langle x', \int_A q dm \rangle,$$

d. h. $h(x'; X^K(\cdot))$ m-integrierbar.

Beweis von c):

Wegen b) gibt es zu jedem $x' \in Z_2$ eine m-Nullmenge $N(x')$ in $\mathcal{A}$, so daß $\forall a \in A \setminus N(x')$ $h(x'; X^K(a)) > -\infty$ ist. Es bezeichne D' die abzählbare dichte Teilmenge von Z_2 . Wir setzen dann

$$(4) \quad N := \bigcup_{x' \in D'} N(x').$$

Für jedes $a \in A$ sei $F(a) := \{x' \in Z_2 : h(x'; X^K(a)) > -\infty\}$.

Da $X^K(a) \subset X(a)$, gilt $Z_2^+ \subset F(a)$. Also ist $\forall a \in A$ $\text{int } F(a) \neq \emptyset$.

Wegen der Konvexität von $F(a)$, die eine Folge der Konkavität der Stützfunktion ist, haben wir $\text{int } F(a) = \text{int } \overline{F(a)}$.

Da nun $\forall a \in A \setminus N$ D' Teilmenge von $F(a)$ ist, ergibt sich daraus die Behauptung.

Beweis von d):

Infolge (3.4) ist $L(X^K) \neq \emptyset$. Wir zeigen $L(\overline{X^K}) \subset L(X^K)$; daraus folgt dann die Behauptung. Der Beweis wird indirekt geführt, d. h. wir nehmen an, es existiere ein $f \in L(\overline{X^K})$ und ein $x'_0 \in K'$, so daß

$$(5) \quad \langle x'_0, \int_A (q-f) dm \rangle < 0$$

ist. Setzen wir $\epsilon := -\frac{1}{m(A)} \cdot \langle x'_0, \int_A (q-f)dm \rangle$, dann ist die Menge $U := \{x \in Z_1 : |\langle x'_0, x \rangle| < \epsilon\}$ eine $\mathcal{G}(Z_1, Z_2)$ -Nullumgebung. Es gibt also ein $B \in \mathcal{A}$ mit $m(B) = m(A)$, so daß

$$(f(a)+U) \cap X^K(a) \neq \emptyset \quad \forall a \in B.$$

Dann können wir die Korrespondenz $\phi: A \rightarrow \mathcal{P}_0(Z_1)$ definieren durch:

$$\phi(a) := \begin{cases} (f(a)+U) \cap X^K(a) & , a \in B \\ \{0\} & , \text{sonst} \end{cases}$$

Als Durchschnitt der Ri-meßbaren Korrespondenzen $f(\cdot)+U$ und X^K ist ϕ und damit $\bar{\phi}$ Ri-meßbar. Wegen a) ist auf $\bar{\phi}$ (2.15) anwendbar, d. h. $\bar{\phi}$, und wegen (2.10) auch ϕ , sind bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}(\mathcal{Y}_{Z_1})$, mit $\mathcal{Y}_{Z_1}$ gemäß (2.16), nach außen meßbar. Das impliziert nach (2.7) die Au-Meßbarkeit von ϕ bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}(\mathcal{Y}_{Z_1})$, infolge (2.20) gibt es also eine $\mathcal{A}-\mathcal{L}(\mathcal{Y}_{Z_1})$ -, und wegen $\mathcal{G}(Z_1, Z_2) \subset \mathcal{Y}_{Z_1}$ sogar $\langle Z_2, Z_1 \rangle$ -meßbare Auswahlfunktion $\tilde{f}$ von ϕ .

Nun bestehen die Ungleichungen:

$$(6) \quad \langle x', \int_A (q-\tilde{f})dm \rangle \geq 0 \quad \forall x' \in K', \text{ und}$$

$$(7) \quad \langle x'_0, \int_A (\tilde{f}-f)dm \rangle > -m(A) \cdot \epsilon = \langle x'_0, \int_A (q-f)dm \rangle$$

bzw.

$$(7') \quad \langle x'_0, \int_A f dm \rangle > \langle x'_0, \int_A q dm \rangle$$

(7') ist aber ein Widerspruch zu (6), d. h. es ist

$$L(\overline{X^K}) = L(X^K).$$

Beweis von e):

Aus c) und (6.2) folgt, daß $\forall a \in A \setminus N \quad X^{Z_1^+}(a) \in \mathcal{G}(Z_1, Z_2)$ -relativ kompakt ist. Wir definieren dann die Korrespondenz $\psi: A \rightarrow \mathcal{G}(Z_1, Z_2) - \mathcal{I}_c(Z_1)$ durch

$$\psi(a) := \begin{cases} \overline{\{x \in X^{Z_1^+}(a); u(a, x) = \sup u(a, X^{Z_1^+}(a))\}}; & a \in A \setminus N \\ \{0\} & ; \text{sonst} \end{cases}$$

und wollen sehen:

(8) ψ ist $\mathcal{A}$ -meßbar bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{L}(\mathcal{T}_{Z_1})$ mit $\mathcal{T}_{Z_1}$ gemäß (2.16).

Dazu betrachten wir zunächst für ein $c \in \mathbb{R}$ die Mengenidentität:

$$\begin{aligned} \{a \in A: \sup u(a, X^{Z_1^+}(a)) \geq c\} &= \text{pr}_A(\{(a, x) \in \mathcal{G}(X^{Z_1^+}); u(a, x) \geq c\}) = \\ &= \text{pr}_A(\overline{X^{Z_1^+}} \cap \{(a, x) \in AxZ_1: u(a, x) \geq c\}). \end{aligned}$$

Nun ist infolge (2.5) $u \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}(\mathcal{T}_{Z_1})$ -meßbar. Außerdem ist

$\overline{X^{Z_1^+}}$ $\mathcal{R}$ -meßbar und wegen (2.14) auch $\mathcal{A}$ -meßbar, d. h.

$\mathcal{G}(X^{Z_1^+}) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}(\mathcal{G}(Z_1, Z_2)) \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}(\mathcal{T}_{Z_1})$. Wegen (3.14) aus

[16] liegt also $\{a \in A: \sup u(a, X^{Z_1^+}(a)) \geq c\}$ in $\mathcal{A}$; d. h.

die Funktion $A \ni a \mapsto \sup u(a, X^{Z_1^+}(a)) \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{A}$ -meßbar.

Daraus folgt sofort (8), denn wir haben:

$$G(\psi) = \{(a, x) \in AxZ_1: u(a, x) = \sup u(a, X^{Z_1^+}(a))\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}(\mathcal{T}_{Z_1})$$

Es gibt also eine $\mathcal{A} - \mathcal{L}(\mathcal{T}_{Z_1})$ -meßbare Auswahlfunktion

$f_1: A \rightarrow Z_1$ von ψ . f_1 ist wegen $\mathcal{G}(Z_1, Z_2) \subset \mathcal{T}_{Z_1}$ auch $\langle Z_2, Z_1 \rangle$ -meßbar und sogar $m - \langle Z_2, Z_1 \rangle$ -integrierbar, denn wir haben: $\int_A h(x'; X(\cdot)) dm \leq \int_A \langle x', f_1(\cdot) \rangle dm \leq$

$\leq \int_A \langle x', q(\cdot) \rangle dm \quad \forall x' \in Z_2^+$. Also liegt f_1 in $L(X^{Z_1^+})$ und es

gibt infolge (V.7) (c) eine Funktion $f_2 \in L(X)$ mit:

$u(a, f_2(a)) > u(a, f_1(a)) = \sup_{\overline{X^{Z_1^+}}(a)} u(a, X^{Z_1^+}(a)) \geq \sup_{X^{Z_1^+}(a)} u(a, X^{Z_1^+}(a))$
für m -fast alle $a \in A$.

Also ist sicher $\int_A (f_2 - q) dm$ ein Element aus E , d. h. $E \neq \emptyset$.
 Δ

Behauptung 3: Es sei z_0 ein infolge (V.8) (c) existierender

Punkt aus $\text{int } E$. Dann gilt für die Menge

$P := \{p \in C': \langle p, z_0 \rangle = 1\}$:

a) P konvex und $0 \notin P$; (trivial).

b) P ist nichtleer.

c) P ist $\mathcal{G}(Z_2, Z_1)$ -kompakt.

d) $\text{cone } P = C'$

e) Die Spurtopologie $\mathcal{G}(Z_2, Z_1) \cap P$ ist metrisierbar.

Beweis von b):

Da $z_0 \in \text{int } E \subset C$ ist, gilt $\forall x' \in C': \langle x', z_0 \rangle \geq 0$.

Wir zeigen: (9) $\langle x', z_0 \rangle = 0$ und $x' \in C' \rightarrow x' = 0$.

Es gibt eine $\mathcal{G}(Z_1, Z_2)$ -Nullumgebung U , so daß $z_0 + U \subset C$.

Dann ist wegen $\langle x', z_0 \rangle = 0$:

(10) $\langle x', x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in U$

Wäre nun $x' \neq 0$, so gäbe es ein $x_1 \in Z_1$, so daß $\langle x', x_1 \rangle > 0$ ist. Da U als kreisförmig und absorbierend angenommen werden

darf, finden wir eine natürliche Zahl n , so daß:

$$\frac{1}{n} x_1 \in U \quad \text{und} \quad -\frac{1}{n} x_1 \in U;$$

woraus folgt:

$$(11) \quad \langle x', \frac{1}{n} x_1 \rangle > 0 \quad \text{bzw.}$$

$$(11') \quad \langle x', -\frac{1}{n} x_1 \rangle < 0.$$

Die Relation (11') ist aber ein Widerspruch zu (10). Also ist $x' = 0$. Wegen (9) gibt es ein $x' \in C'$, so daß $\langle x', z_0 \rangle > 0$ ist; also existiert auch ein $x' \in C'$ mit $\langle x', z_0 \rangle = 1$, d. h. P ist nichtleer.

Beweis von c):

Es genügt zu zeigen, daß die Stützfunktion $h(\cdot; P)$ von P auf ganz Z_1 endlichwertig und stetig ist. Dann ist nämlich die absolute Polare P^* von P in Z_1 eine $\mathcal{G}(Z_1, Z_2)$ -Nullumgebung; denn wir haben die Darstellung

$$P^* = \{x \in Z_1: |\langle x', x \rangle| \leq 1 \quad \forall x' \in P\} =$$

$$= \{x \in Z_1: h(x; P) \geq -1\} \cap \{x \in Z_1: h(-x; P) \geq -1\}.$$

Also ist $P \subset P^{**}$ $\mathcal{G}(Z_2, Z_1)$ -relativ-kompakt, (Bourbaki-Alaoglu). Da aber P als Durchschnitt der abgeschlossenen konvexen Mengen C' und $\{x' \in Z_2: \langle x', z_0 \rangle = 1\}$ abgeschlossen ist, folgt die $\mathcal{G}(Z_2, Z_1)$ -Kompaktheit von P .

Wir zeigen also, (vgl. (2.12)):

$$(12) \quad h(x; P) > -\infty \quad \forall x \in Z_1$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Es gibt eine offene Menge } V \text{ in } Z_1, \text{ auf der } h(\cdot; P) \\ \text{nach unten beschränkt ist.} \end{array} \right.$$

zu (12):

Nach (V.8) (c) existiert eine offene Nullumgebung U in Z_1 mit

$$(14) \quad z_0 + U \subset C.$$

Wir betrachten ein festes $x \in Z_1$. Dazu gibt es eine reelle Zahl $\lambda > 0$, so daß $\lambda x \in U$, also $z_0 + \lambda x \in C$ ist. Also ist $\langle x', z_0 + \lambda x \rangle \geq 0$ bzw. $\langle x', x \rangle \geq -\frac{1}{\lambda} \cdot \langle x', z_0 \rangle = -\frac{1}{\lambda}$ $\forall x' \in P$; d. h. es gilt (12).

zu (13):

Setzen wir $V := z_0 + U$. Dann gilt $\forall x \in V$, die nach (14) auch in C liegen: $h(x; P) \geq h(x; C') \geq 0$.

Beweis von d):

Es bleibt die Inklusion $C' \subset \text{cone } P$ zu zeigen:

Betrachten wir daher ein $x' \in C'$ und unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $\langle x', z_0 \rangle > 0$

2. Fall: $\langle x', z_0 \rangle = 0$.

Im 1. Fall setzen wir: $y' := \frac{1}{\langle x', z_0 \rangle} x'$. Dieses y' liegt

in P und daher $x' = \langle x', z_0 \rangle \cdot y'$ in $\text{cone } P$.

Im 2. Fall ist $x' = 0$, (wegen (9)), d. h. $x' \in \text{cone } P$.

Beweis von e):

Da (Z_2, τ_2) separabel ist, gibt es in Z_1 eine abzählbare Menge M , so daß $Z_1 = \overline{\mathcal{G}(Z_1, Z_2)}$; vgl. etwa [23] § 21.3(5). Daher ist die Topologie τ_M der gleichmäßigen Konvergenz auf allen endlichen Teilmengen von M eine lokalkonvexe Hausdorff-Topologie auf Z_2 . τ_M ist offensichtlich metrisierbar und wir haben: $\tau_M \subset \mathcal{G}(Z_2, Z_1)$. Nun folgt aus einem bekannten Resultat aus der Topologie (etwa: [9], chap. I, § 9.4 Cor.3), daß auf der $\mathcal{G}(Z_2, Z_1)$ -kompakten Menge P τ_M und $\mathcal{G}(Z_2, Z_1)$ übereinstimmen, d. h. $\mathcal{G}(Z_2, Z_1) \cap P$ ist metrisierbar.

Δ

Behauptung 4: Die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist in allen Punkten $(p, x) \in P \times Z_1$ bezüglich $\mathcal{G}(Z_2, Z_1) \otimes \mathcal{G}(Z_1, Z_2)$ stetig.

Beweis:

Infolge [9], chap. X, § 3.1, Cor. 3 zu Prop. 1, genügt es, die folgenden beiden Punkte zu zeigen:

(15) $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in Z_1 \text{ sind die Abbildungen } P \ni p \mapsto \langle p, x \rangle \in \mathbb{R} \\ \text{stetig bezüglich } \mathcal{G}(Z_2, Z_1). \end{array} \right.$

(16) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Die Familie } \{ \langle p, \cdot \rangle ; p \in P \} \text{ von Abbildungen von } Z_1 \\ \text{nach } \mathbb{R} \text{ ist eine } \mathcal{G}(Z_1, Z_2)\text{-gleichstetige Teilmenge} \\ \text{von } \mathbb{R}^{Z_1}. \end{array} \right.$

Der Punkt (15) ist trivialerweise erfüllt. Für (16) genügt es, die Gleichstetigkeit der Funktionenfamilie im Punkte 0 zu zeigen. Diese folgt, wenn wir P und $\{ \langle p, \cdot \rangle ; p \in P \}$ identifizieren aus der in der Behauptung 3 c) geführten Überlegung.

Δ

Behauptung 5: Es sei jetzt X Ri-integrierbar bezüglich m und nehme Werte in $\mathcal{G}(Z_1, Z_2) - \mathcal{I}_c(Z_1)$ an. Es bezeichne $\forall a \in A$ $\beta(a, \cdot)$ die Einschränkung von $\gamma(a, \cdot)$ auf P .

Dann gilt:

- a) $\forall a \in A$ ist $\beta(a, \cdot)$ bezüglich $\mathcal{G}(Z_2, Z_1) \cap P$ und $\mathcal{G}(Z_1, Z_2) \cap X(a)$ nach außen stetig.
- b) $\forall a \in A$ ist $\beta(a, \cdot)$ in allen Punkten $p \in P(a) := \{ x' \in P : h(x'; X(a)) < \langle x', q(a) \rangle \}$ nach innen stetig bezüglich $\mathcal{G}(Z_2, Z_1)$ und $\mathcal{G}(Z_1, Z_2)$.

- c) $\forall a \in A$ ist die durch Einschränkung von U_1 auf P entstehende Korrespondenz

$$U_2 : A \times P \rightarrow \mathcal{I}_c(Z_1), \text{ also}$$

$$U_2(a, p) := \begin{cases} \{ x \in \beta(a, p); u(a, x) = \sup u(a, \beta(a, p)) \}; \\ p \in P(a) \\ \\ \{ x \in X(a); \langle p, x \rangle = \langle p, q(a) \rangle \}, \\ p \in P \setminus P(a), \end{cases}$$

in Abhängigkeit von p bezüglich $\mathcal{G}(Z_2, Z_1) \cap P$ und $\mathcal{G}(Z_1, Z_2) \cap X(a)$ nach außen stetig.

- d) $\forall p \in P$ ist $U_2(\cdot, p)$ Au-integrierbar bezüglich m .
- e) Es gibt ein Paar $(\bar{p}, \bar{f}) \in P \times L(X^C)$, so daß $\bar{f}(a) \in U_1(a, \bar{p})$ für m -fast alle $a \in A$.

Beweis von a):

Es sei a ein beliebiges Element aus A . Wir wenden jetzt (1.19) an: Da $X(a)$ $\mathcal{G}(Z_1, Z_2)$ -kompakt ist, haben wir nur die Abgeschlossenheit von $G(\beta(a, \cdot))$ in $Z_0 := (\mathcal{G}(Z_2, Z_1) \cap P) \otimes (\mathcal{G}(Z_1, Z_2) \cap X(a))$ zu zeigen:

Sei also (p_0, x_0) ein Punkt aus dem Z_0 -Abschluß von $G(\beta(a, \cdot))$. Wir wollen sehen, daß er in $G(\beta(a, \cdot))$ liegt. Nehmen wir das Gegenteil an, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, mit

$$\langle p_0, x_0 \rangle > \langle p_0, q(a) \rangle + \varepsilon.$$

Wegen der Stetigkeit der Funktion $\langle \cdot, q(a) \rangle$ bezüglich $\mathcal{G}(Z_2, Z_1) \cap P$ gibt es eine $\mathcal{G}(Z_2, Z_1) \cap P$ -Umgebung V_1 von p_0 , so daß:

$$(17) \quad \langle p, q(a) \rangle - \langle p_0, q(a) \rangle \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall p \in V_1.$$

Wegen der Stetigkeit von $\langle \cdot, \cdot \rangle |_{P \times Z_1}$ bezüglich Z_0 finden wir Umgebungen U_1 von p_0 in $\mathcal{G}(Z_2, Z_1) \cap P$ und U_2 von x_0 in $\mathcal{G}(Z_1, Z_2) \cap X(a)$ mit

$$(18) \quad \langle p, x \rangle \geq \langle p_0, q(a) \rangle + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall (p, x) \in U_1 \times U_2.$$

Die Menge $V := (U_1 \cap V_1) \times U_2$ ist eine Z_0 -Umgebung von (p_0, x_0) , und $\forall (p, x) \in V$ gilt:

$$\langle p, x \rangle \geq \langle p_0, q(a) \rangle + \frac{\varepsilon}{2} \geq \langle p, q(a) \rangle + \frac{\varepsilon}{4} > \langle p, q(a) \rangle,$$

d. h. $V \cap G(\beta(a, \cdot)) = \emptyset$, im Widerspruch zu: $(p_0, x_0) \in \overline{G(\beta(a, \cdot))}^{Z_0}$.

Beweis von b):

Es sei $\hat{\beta}(a, \cdot): P(a) \rightarrow \mathcal{P}_0(Z_1)$ durch die Vorschrift $\hat{\beta}(a, p) := \{x \in X(a) : \langle p, x \rangle < \langle p, q(a) \rangle\}$ definiert; (vgl. die Definition von $P(a)$).

Wir zeigen:

$$(19) \quad \left. \begin{array}{l} \hat{\beta}(a, \cdot) \text{ ist in beliebigem Punkt } p_0 \in P(a) \text{ nach innen} \\ \text{stetig bezüglich } \mathcal{G}(Z_2, Z_1) \text{ und } \mathcal{G}(Z_1, Z_2). \end{array} \right\}$$

$$(20) \quad \overline{\hat{\beta}(a,p)} = \beta(a,p) \quad \forall p \in P(a).$$

zu (19): Es sei W eine $\mathcal{G}(Z_1, Z_2)$ -offene Menge in Z_1 mit $\beta(a, p_0) \cap W \neq \emptyset$.

Dann gilt es ein $x_0 \in Z_1$ mit

$$(21) \quad x_0 \in X(a),$$

$$(22) \quad x_0 \in W,$$

$$(23) \quad \langle p_0, x_0 \rangle - \langle p_0, q(a) \rangle < 0.$$

Wegen (23) gibt es eine $\mathcal{G}(Z_2, Z_1)$ -Umgebung U von p_0 , so daß

$$(23') \quad \langle p, x_0 \rangle - \langle p, q(a) \rangle < 0 \quad \forall p \in U.$$

(21), (22) und (23') implizieren: $x_0 \in \hat{\beta}(a, p) \cap W \quad \forall p \in U$;
d. h. $\hat{\beta}(a, \cdot)$ ist in p_0 nach innen stetig, (wegen (1.15)).

zu (20): Es genügt, die Inklusion: " $\beta(a, p) \subset \overline{\hat{\beta}(a, p)}$ " zu zeigen. Sei $x_0 \in \beta(a, p)$ und U eine $\mathcal{G}(Z_1, Z_2)$ -Umgebung von x_0 .
O.B.d.A. gibt es $x'_1, \dots, x'_n \in Z_2$ und $\varepsilon > 0$, so daß

$$U = \{x \in Z_1 : |\langle x'_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon, (i = 1, \dots, n)\}.$$

Wir wollen $U \cap \hat{\beta}(a, p) \neq \emptyset$ zeigen. Sei x_1 ein beliebiger Punkt aus $\hat{\beta}(a, p)$ und $x_1 \neq x_0$; (gibt es kein solches x_1 , so sind wir bereits fertig). Die Größe

$$\alpha := \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \left(\max_{i=1, \dots, n} |\langle x'_i, x_1 - x_0 \rangle| \right)^{-1}$$

ist sicher positiv. Unterscheiden wir die zwei Fälle:

1. Fall: $\alpha \geq 1$. Das bedeutet: $\frac{\varepsilon}{2} \geq \max |\langle x'_i, x_1 - x_0 \rangle| \geq |\langle x'_1, x_1 - x_0 \rangle| \quad \forall i=1, \dots, n$ bzw. $x_1 \in U$. Also liegt x_0 in $\overline{\hat{\beta}(a, p)}$.

2. Fall: $\alpha < 1$. Dann liegt $x_2 := \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0$ in $X(a)$ und es gilt: $\langle p, x_2 \rangle = \langle p, \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0 \rangle =$
 $= \alpha \langle p, x_1 \rangle + (1-\alpha) \langle p, x_0 \rangle < \alpha \langle p, q(a) \rangle + (1-\alpha) \langle p, q(a) \rangle$;
das bedeutet insgesamt: $x_2 \in \hat{\beta}(a, p)$.

Wegen der Abschätzung: $|\langle x'_1, x_2 - x_0 \rangle| = |\langle x'_1, \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0 - x_0 \rangle|$
 $= \alpha |\langle x'_1, x_1 - x_0 \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ist x_2 auch Element von U ;
 d. h. auch im 2. Fall ist $x_0 \in \beta(a, p)$.
 Die Behauptung b) folgt nun aus (1.17).

Beweis von c): Für die $p \in P(a)$ folgt die äußere Stetigkeit von $U_2(a, \cdot)$ wegen a) und b) aus (1.23) d). Beweisen wir noch die äußere Stetigkeit von $U_2(a, \cdot)$ in einem Punkt $p_0 \in P \setminus P(a)$. Da $(P, \mathcal{G}(Z_2, Z_1) \cap P)$ und $(X(a), \mathcal{G}(Z_1, Z_2) \cap X(a))$ -kompakte metrische Räume sind (vgl. Behauptung 3 e); für $X(a)$ zeigt man das ebenso), können wir das Kriterium aus (1.24) a) benutzen:

Sei also $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen p_0 konvergente Folge in P und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $X(a)$ mit Grenzwert x_0 und $x_n \in U(a, p_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Da x_0 in $X(a)$ liegt, bleibt nur

$$(24) \quad \langle p_0, x_0 \rangle = \langle p_0, q(a) \rangle$$

zu zeigen: Nun ist $\forall n \in \mathbb{N} \quad \langle p_n, x_n \rangle \leq \langle p_n, q(a) \rangle$. Wegen der Stetigkeit der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $P \times Z_1$ und wegen $p_0 \in P \setminus P(a)$, d. h. $h(p_0; X(a)) = \langle p_0, q(a) \rangle$, gilt (24).

Beweis von d):

Sei für jedes $p \in P$ $A(p) := \{a \in A : p \in P(a)\} = \{a \in A : h(p; X(a)) < \langle p, q(a) \rangle\}$. $A(p)$ liegt in $\mathcal{A}$. Wir wollen jetzt (3.4) auf die Korrespondenz $U_2(\cdot, p)$ anwenden. Die Bedingung (ii) folgt aus (V.4) (c) und $U(a, p) \subset X(a)$. Wegen der Abschätzung: $h(x'; X(a)) \leq h(x'; U(a, p)) \leq -h(-x'; U(a, p)) \leq -h(-x'; X(a))$, die $\forall x' \in Z_2$ und $\forall a \in A$ gilt, ist die Bedingung (iii) mit $U' = Z_2$ erfüllt, wenn wir gezeigt haben, daß die Bedingung (i) erfüllt ist; denn X soll Ri-integrierbar sein.

Um die Ri-Meßbarkeit von $U_2(\cdot, p)$ nachzuweisen, zeigen wir die innere Meßbarkeit von $U_2(\cdot, p)$, vgl. (2.11):

Es sei B eine $\mathcal{G}(Z_1, Z_2)$ -abgeschlossene Menge in Z_1 . Dann ist das innere Urbild $(U_2(\cdot, p))^{-1}(B) = \{a \in A(p) : U_2(a, p) \cap B \neq \emptyset\} \cup \{a \in A \setminus A(p) : U_2(a, p) \cap B \neq \emptyset\}$.

Wir müssen daher

$$(25) \quad \{a \in A(p) : U_2(a, p) \cap B \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}, \text{ und}$$

$$(26) \quad \{a \in A \setminus A(p) : U_2(a, p) \cap B \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$$

nachprüfen:

zu (25): Für $a \in A(p)$ ist $U_2(a, p) = \{x \in \beta(a, p) : u(a, x) = \sup u(a, \beta(a, p))\}$. Man überlegt sich, daß $\beta(\cdot, p)$ als Durchschnitt der Au-meßbaren Korrespondenz X - das folgt aus (V.5) (b) und aus (2.14) unter Berücksichtigung von (6.2) - und der wegen (2.5) Au-meßbaren Korrespondenz

$A \ni a \mapsto \{x \in Z_1 : \langle p, x \rangle \leq \langle p, q(a) \rangle\} \in \mathcal{F}_c(Z_1)$ Au-meßbar bezüglich $\mathcal{L}(\mathcal{T}_{Z_1})$ ist. Wie im Beweis zu (8), (mit $U_2(\cdot, p)$)

statt ψ und $\beta(\cdot, p)$ statt $X \overset{Z_1^+}{1}$, erhält man daraus die Au-Meßbarkeit von $U_2(\cdot, p)|_{A(p)}$, woraus wegen $\mathcal{G}(Z_1, Z_2) \subset \mathcal{T}_{Z_1}$ und (2.8) die innere Meßbarkeit von $U_2(\cdot, p)|_{A(p)}$ bzw. (25) folgt.

zu (26): Es gilt:

$$\begin{aligned} \{a \in A \setminus A(p) : U_2(a, p) \cap B \neq \emptyset\} &= \text{pr}_A(G(X) \cap \{(a, x) \in AxZ : \langle p, x \rangle = \\ &= \langle p, q(a) \rangle\} \cap ((A \setminus A(p)) \times B)). \end{aligned}$$

Nun liegen $G(X)$, $(A \setminus A(p)) \times B$ und wegen (2.5) auch $\{(a, x) \in A \times Z : \langle p, x \rangle = \langle p, q(a) \rangle\}$ in $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L}(\mathcal{T}_{Z_1})$, woraus gemäß (3.14) aus [16] (26) folgt.

Beweis von e):

Wir wollen den Fixpunktsatz (1.30) anwenden: Als E wählen wir $(Z_2 \times Z_1, \mathcal{G}(Z_2, Z_1) \otimes \mathcal{G}(Z_1, Z_2))$, K sei die Menge

$P \times \int_A (X-q)dm$ und S die durch

$$S(p,x) := \int_A (U_2(\cdot, p) - q)dm \times R(x)$$

definierte Korrespondenz von K in K , wobei $R: \int_A (X-q)dm \rightarrow \oint_C(P)$

durch $R(x) := \{p \in P: \langle p, x \rangle = \sup \langle P, x \rangle\}$ gegeben ist.

Dann ist K nichtleer, kompakt und konvex. Das folgt aus Behauptung 3 und aus (3.8).

Die äußere Stetigkeit von R erhält man, wenn man in (1.23)

$\phi(x) \equiv P \forall x \in \int_A (X-q)dm$ und $f = \langle \cdot, \cdot \rangle$ setzt, während sich

die äußere Stetigkeit der Korrespondenz

$P \ni p \mapsto \int_A (U_2(\cdot, p) - q)dm \in \oint_C(\int_A (X-q)dm)$ aus (3.15) ergibt.

S ist dann infolge (1.22) b) nach außen stetig. - Nun

liefert uns (1.30) ein $\bar{p} \in P$ und ein $\bar{z} \in \int_A (X-q)dm$, so daß

$$\bar{z} \in \int_A (U_2(\cdot, \bar{p}) - q)dm$$

und $\bar{p} \in R(\bar{z})$.

Zu $\bar{z}$ gibt es ein $\bar{f} \in L(U_2(\cdot, \bar{p}))$ mit $\bar{z} = \int_A (\bar{f} - q)dm$.

Für m -fast alle $a \in A$ ist $\bar{f}(a) \in \gamma(a, \bar{p})$, d. h.

$$\langle \bar{p}, \bar{z} \rangle \leq 0.$$

Nach der Definition von R folgt daraus:

$$\langle p, \bar{z} \rangle \leq 0 \quad \forall p \in P,$$

und wegen Behauptung 3 d)

$$(27) \quad \langle x', \bar{z} \rangle \leq 0 \quad \forall x' \in C',$$

d. h. $\bar{z}$ liegt in $-C'' = -C$ bzw. $\bar{f} \in L(X^C)$.

Behauptung 6: Es sei $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Nullumgebungs-
basis in Z_2 . $\forall n \in \mathbb{N}$ definieren wir:

$$Z_1^{(n)} := V_n^0 \text{ und } X_n: A \rightarrow \mathcal{F}_c(Z_1) \text{ durch:}$$

$$X_n(a) := (q(a) + Z_1^{(n)}) \cap X(a).$$

Dann gilt:

a) Jedes X_n erfüllt die Voraussetzungen der
Behauptung 5.

b) Es sei $((p_n, f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge in

$P \times L(X^C)$, die entsteht, wenn man zu jedem
 $n \in \mathbb{N}$ ein Paar gemäß Behauptung 5 konstruiert

Dann existiert eine Teilfolge $((p_{n_k}, f_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$,

so daß das Paar (p^*, f^*) mit

$$p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{n_k}, \text{ und}$$

$$f^* \in L(X^C) \text{ und } f^*(a) \in \overline{co} \text{ cl } ((f_{n_k}(a))_{k \in \mathbb{N}})$$

m -fast überall, die Punkte (K.1), (K.2)

und (K.3)* erfüllt.

Beweis von a):

Es bleibt nur die Ri-Integrierbarkeit jeder Korrespondenz
 X_n nachzuprüfen:

Wir haben $\forall x' \in Z_2$ die beiden Ungleichungen:

$$h(x'; X_n(a)) \geq \langle x', q(a) \rangle + h(x'; Z_1^{(n)}) \quad \forall a \in A$$

$$\text{und} \quad h(x'; X_n(a)) \leq \langle x', q(a) \rangle \quad \forall a \in A, \text{ da } q(a) \in X_n(a).$$

Da X und damit jedes X_n Ri-meßbar ist, folgt daraus a).

Beweis von b):

Zunächst bemerken wir: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für m -fast alle
 $a \in A$ gilt:

$$(28) \left\{ \begin{array}{l} u(a, f_n(a)) = \sup \{ u(a, x); x \in X_n(a) \text{ mit } \langle p_n, x \rangle \leq \\ \leq \langle p_n, q(a) \rangle \}. \end{array} \right.$$

Die Menge P ist $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_1)$ -folgenkompakt, also gibt es eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ und ein $p^* \in P$ mit $p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{n_k}$.

Da $0 \notin P$, ist $p^* \neq 0$, also (K.1) erfüllt.

Wenn für die Menge $A(p^*) = \{a \in A : h(p^*; X(a)) < \langle p^*, q(a) \rangle\}$ $m(A(p^*)) = 0$ ist, dann setzen wir $f^*(a) := q(a) \forall a \in A$ und erhalten in (p^*, f^*) ein Paar, das (K.1), (K.2) und (K.3)* erfüllt.

Betrachten wir also den nichttrivialen Fall $m(A(p^*)) > 0$:

Die zu $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gehörenden Folgen $(f_{n_k}(a))_{k \in \mathbb{N}}$ besitzen $\forall a \in A \setminus N$ mit N aus Behauptung 2 c) Häufungspunkte, d. h. wir können eine Korrespondenz $\xi: A \rightarrow \mathcal{G}_c(\mathbb{Z}_1)$ definieren durch die Vorschrift:

$$\xi(a) := \begin{cases} \overline{\text{cl}} \{f_{n_k}(a); k \in \mathbb{N}\}; & a \in A \setminus N \\ \{0\} & ; a \in N \end{cases}$$

Wir zeigen, ξ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes (3.4).

Um (i) nachzuprüfen, beweisen wir:

$$(29) \quad h(x'; \xi(a)) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \langle x', f_{n_k}(a) \rangle \quad \forall x' \in \mathbb{Z}_2 \quad \forall a \in A \setminus N.$$

Es ist $h(x'; \xi(a)) = h(x'; \overline{\text{cl}} \{f_{n_k}(a); k \in \mathbb{N}\})$. Setzen wir für festes $x' \in \mathbb{Z}_2$ und festes $a \in A \setminus N$ zur Abkürzung die rechte Seite von (29) =: r .

Dann gibt es eine Teilfolge $(n_{k(1)})_{1 \in \mathbb{N}}$ von $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so daß $r = \lim_{1 \rightarrow \infty} \langle x', f_{n_{k(1)}}(a) \rangle$. Die Folge $(f_{n_{k(1)}}(a))_{1 \in \mathbb{N}}$ be-

sitzt, da $\text{cl} \{f_{n_k}(a); k \in \mathbb{N}\}$ als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $X^0(a)$ kompakt, und damit auch folgenkompakt ist, eine konvergente Teilfolge, die gegen ein $x_0 \in \text{cl} \{f_{n_k}(a); k \in \mathbb{N}\}$ konvergiert. Die zugehörige, durch Anwendung von x' , entstehende Teilfolge von

$(\langle x', f_{n_{k(1)}}(a) \rangle)_{1 \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert gegen r , also gilt:

$$(30) \quad r = \langle x', x_0 \rangle \geq h(x'; cl \{f_{n_k}(a); k \in \mathbb{N}\}).$$

Die Umkehrung von (30) erhält man, indem ein $x \in cl \{f_{n_k}(a); k \in \mathbb{N}\}$ mit $\langle x', x \rangle = h(x'; cl \{f_{n_k}(a); k \in \mathbb{N}\})$ und eine zugehörige Teilfolge $(f_{n_{k(l)}}(a))_{l \in \mathbb{N}}$ von ,

$(f_{n_k}(a))_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x = \lim_{l \rightarrow \infty} f_{n_{k(l)}}(a)$ betrachtet wird. Für

den Grenzwert $\langle x', x \rangle$ einer Teilfolge der reellen Folge $(\langle x', f_{n_k}(a) \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ gilt nun offensichtlich $\langle x', x \rangle \geq r$; daraus ergibt sich unter Berücksichtigung von (30) die Formel (29).

Aus (29) folgt sofort die Ri-Meßbarkeit von ξ . Die Bedingung (ii) aus (3.4) folgt aus der Kompaktheit jeder Menge $\overline{X^C(a)}$, $(a \in A \setminus N)$, während sich (iii) aus der Ri-Integrierbarkeit von $\overline{X^C}$ ergibt.

Sei f^* die m - $\langle Z_2, Z_1 \rangle$ -integrierbare Auswahlfunktion von ξ gemäß (3.4) (Weg 1).

zu (K.3)*: (31) Für m -fast alle $a \in A$ ist $f^*(a) \in \gamma(a, p^*)$.

Um (31) einzusehen, benützen wir die Stetigkeit der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $P \times Z_1$ und

$$(28') \quad \langle p_{n_k}, f_{n_k}(a) \rangle \leq \langle p_{n_k}, q(a) \rangle \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

woraus folgt:

$$\langle p^*, z \rangle \leq \langle p^*, q(a) \rangle \quad \forall z \in cl((f_{n_k}(a))_{k \in \mathbb{N}}).$$

Wegen Linearität und Stetigkeit ist damit (31) richtig.

(32) Für m -fast alle $a \in A$ ist $f^*(a) \in U_1(a, p^*)$.

Zum Beweis von (32) unterscheiden wir 2 Fälle:

1. Fall: $h(p^*; X(a)) = \langle p^*, q(a) \rangle$

2. Fall: $h(p^*; X(a)) < \langle p^*, q(a) \rangle$.

Im ersten Fall muß wegen (31) $\langle p^*, f^*(a) \rangle = \langle p^*, q(a) \rangle$ sein,

d. h. $f^*(a)$ liegt in $U_1(a, p^*)$.

zum 2. Fall: Nach (20) ist hier $\beta(a, p^*) = \overline{\beta(a, p^*)}$. Es gibt also zu jedem $y \in \beta(a, p^*) = \gamma(a, p^*)$ ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in $\hat{\beta}(a, p^*)$, so daß $y = \lim_{i \in I} x_i$ in $\mathcal{G}(Z_1, Z_2)$ ist. Somit ist (32) bewiesen, wenn wir

$$(33) \quad u(a, f^*(a)) \geq u(a, x) \quad \forall x \in \hat{\beta}(a, p^*)$$

gezeigt haben.

Zu einem $x \in \hat{\beta}(a, p^*)$ gibt es eine natürliche Zahl k_1 , so daß

$$\langle p_{n_k}, q(a) \rangle > \langle p_{n_k}, x \rangle \quad \forall k \geq k_1$$

und eine natürliche Zahl k_2 , so daß $x \in X_{n_k}(a) \quad \forall k \geq k_2$.

Also ist $\forall k \geq \max(k_1, k_2) \quad x \in X_{n_k}(a) \cap \hat{\beta}(a, p_{n_k})$ und daher $u(a, f_{n_k}(a)) \geq u(a, x)$. Wegen der Stetigkeit und Konkavität von $u(a, \cdot)$ ist dann auch $u(a, f^*(a)) \geq u(a, x)$; das ist (33).

zu (K.2):

$$(34) \quad \text{Für } m\text{-fast alle } a \in A \text{ ist } \langle p^*, f^*(a) \rangle = \langle p^*, q(a) \rangle.$$

Wir unterscheiden die zwei Fälle aus dem Beweis von (32).

Im 1. Fall ist (34) bereits gezeigt. Betrachten wir also den Fall: $h(p^*; X(a)) < \langle p^*, q(a) \rangle$. Da $f^* \in L(X^C)$ und $L(X^C) \subset L(X_1^{Z_1})$, gibt es wegen (V.7) (c) ein $x \in X(a)$, so daß

$$u(a, x) > u(a, f^*(a)).$$

Wegen (32) kann dieses x nicht in $\gamma(a, p^*)$ liegen, also ist

$$\langle p^*, q(a) \rangle < \langle p^*, x \rangle.$$

Wäre nun $\langle p^*, f^*(a) \rangle < \langle p^*, q(a) \rangle$, so gäbe es ein $t \in]0, 1[$, so daß:

$$(35) \quad \langle p^*, tx + (1-t)f^*(a) \rangle = \langle p^*, q(a) \rangle \text{ ist.}$$

Wegen der Konkavität von $u(a, \cdot)$ müßte dann

$$(36) \quad u(a, tx + (1-t)f^*(a)) > u(a, f^*(a)) \text{ gelten.}$$

Aus (35) folgt wegen der Konvexität von $X(a)$, daß der Punkt $tx + (1-t)f^*(a)$ in $Y(a, p^*)$ liegt, was jedoch infolge (32) und (36) nicht sein kann. Also gilt (34).

Daraus schließen wir jetzt auf

$$(37) \int_A f^* dm = \int_A q dm,$$

indem wir die "Differenz" $z_0 = \int_A (q - f^*) dm$ einführen und

zeigen, daß $z_0 = 0$ sein muß:

$f^* \in L(X^C)$ bedeutet gerade: $z_0 \in C = \text{cone } E$. Also gibt es ein $\lambda \geq 0$ und ein $f \in L(X)$ mit

$$(38) u(a, f(a)) > \sup u(a, X_1^+(a)) \text{ für m-fast alle } a \in A$$

und mit (39) $z_0 = \lambda \cdot \left(\int_A (f - q) dm \right)$.

Wegen (38) ist $u(a, f(a)) > u(a, f^*(a))$ für m-fast alle $a \in A$, das bedeutet infolge (32), daß für m-fast alle $a \in A(p^*)$ $\langle p^*, f(a) \rangle > \langle p^*, q(a) \rangle$ sein muß, während für die $a \in A \setminus A(p^*)$ sicher $\langle p^*, f(a) \rangle \geq \langle p^*, q(a) \rangle$ ist. Durch Integration über A erhalten wir:

$$\left\langle p^*, \int_A (f - q) dm \right\rangle > 0.$$

Aus (39) folgt somit: $\langle p^*, z_0 \rangle = 0$ genau dann, wenn $\lambda = 0$ bzw. $z_0 = 0$. Also ist nach (34) $z_0 = 0$.

Δ

Liste der verwendeten Symbole

$ A $	S. 3
$[B$	S. 3
1_B	S. 3
$\bar{B}, \text{int } B$	S. 3
$\text{cl}\{x_k; k \in \mathbb{N}\}$	S. 3
$\mathcal{L}(\mathcal{T})$	S. 3
$\alpha(\mathcal{T})$	S. 3
$K_d(x; \epsilon), K'_d(x; \epsilon)$	S. 3
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	S. 3
$\mathcal{G}(E, F)$	S. 4
$\overline{\text{co}}$	S. 4
M^0, M^*	S. 4
$\text{cone } K$	S. 4
$\underline{C}$	S. 5
$h(x'; K)$	S. 5
$\mathcal{P}_0(M)$	S. 6

$\mathcal{G}^{(M)}$ S. 6

$\mathcal{F}^{(M)}, \mathcal{F}_c^{(M)}$ S. 6

$\mathcal{L}^{(M)}, \mathcal{L}_c^{(M)}$ S. 6

$A^a \mathcal{G}$ S. 6

$A^i \mathcal{G}$ S. 6

$\phi^a(C)$ S. 7

$\phi^i(C)$ S. 7

$G(\phi)$ S. 7

ℓ_a, ℓ_i, ℓ S. 8

$\gamma_a, \gamma_i,$ S. 8

γ_m S. 10

$W_r(C), V_r(C), R_r(C)$ S. 11

ℓ_m S. 11

$V_{r,e_1}^{(1)}(C)$ S. 13

$V_{r,e_1}^{(2)}(C)$ S. 15

$\mathcal{A}_m$ S. 38

A $<$	S. 47
$m - \langle F, E \rangle$ -integrierbar	S. 49
$J - (W, \mathfrak{A}, m)$	S. 50
$L(\phi; (W, \mathfrak{A}, m), \langle F, E \rangle), L(\phi)$	S. 52
$H_C(K), H(K)$	S. 57
$\mathcal{E}$	S. 74
$\mathcal{Z}$	S. 79
$\gamma(a, p)$	S. 80
$U(a, p)$	S. 80
$U_1(a, p)$	S. 83
z_1^+, z_2^+	S. 84
x^K	S. 87

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist in zwei Kapitel gegliedert. Wir stellen im Kapitel I Ergebnisse über Korrespondenzen zusammen, mit denen wir im Kapitel II die Existenz eines Konkurrenzgleichgewichtes für eine Tauschwirtschaft mit beliebig vielen Wirtschaftssubjekten und Warenarten und zufallsabhängigen Verbrauchsmengen und Quellenzuweisungen beweisen können.

Im § 1 definieren wir auf $g \subset \mathcal{P}_0(E)$, wobei (E, τ) ein topologischer Raum ist, die äußere, die innere, die Exponentialtopologie, und falls E metrischer Raum ist, die metrische Topologie, und untersuchen Zusammenhänge zwischen diesen Topologien. Sodann betrachten wir Korrespondenzen $\phi: (E_1, \tau_1) \rightarrow g(E_2)$, wobei (E_2, τ_2) ein topologischer Raum ist und definieren Stetigkeitsbegriffe, die zu den verschiedenen Topologien gehören. Es werden eine Reihe von Stetigkeitskriterien gebracht, die im wesentlichen aus [19] stammen.

§ 2 dient der Untersuchung der Meßbarkeit von Korrespondenzen. Es werden alle in der Literatur verwendeten Meßbarkeitsbegriffe eingeführt und Zusammenhänge zwischen ihnen hergestellt. Daraus ergeben sich dann einige nützliche Meßbarkeitskriterien. Im letzten Teil des Paragraphen wird kurz auf die Konstruktion meßbarer Auswahlfunktionen eingegangen.

§ 3 befaßt sich mit der Integration von Korrespondenzen. Wir zitieren eine Reihe von Ergebnissen aus [35], zeigen dann, unter welchen Voraussetzungen man mit der Abgeschlossenheit der Integralmenge rechnen kann, und beweisen

schließlich einen Satz über die "Stetigkeit" der Integralmenge in Abhängigkeit von einem Parameter.

Im § 4 verallgemeinern wir den Satz von den Übergangswahrscheinlichkeiten auf Korrespondenzen.

Der 1. Paragraph des Kapitels II, § 5, bringt eine heuristische Einführung der in der Gleichgewichtsanalyse verwendeten Begriffe. Es wird erklärt, warum wir beliebig viele Warenarten zulassen wollen, und was unter einer zufallsabhängigen Wirtschaft und einem durchschnittlichen Konkurrenzgleichgewicht zu verstehen ist.

Im § 6 werden die Voraussetzungen, die zum Beweis des Existenzsatzes benötigt werden, aufgeführt und erklärt.

Im § 7 formulieren wir den Existenzsatz für ein durchschnittliches Konkurrenzgleichgewicht in einer zufallsabhängigen Wirtschaft mit beliebig vielen Wirtschaftssubjekten und Warenarten, und beweisen ihn.

Literaturverzeichnis

- [1] Arrow, K.J., and Debreu, G.: Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. Econometrica 22, Nr. 3, (1954)
- [2] Aumann, R.J.: Markets with a Continuum of Traders. Econometrica 32, 39-50 (1964)
- [3] -- Integrals of Set-valued Functions. J.Math.Anal. Appl. 12, 1-12 (1965)
- [4] -- Existence of Competitive Equilibria in Markets with a Continuum of Traders. Econometrica 34, 1-17 (1966)
- [5] -- Measurable Utility and the Measurable Choice Theorem. Colloques Internationaux du C.N.R.S., 171, 15-26 (1969)
- [6] Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. Walter de Gruyter & Co. Berlin 1968
- [7] Bewley, T.F.: Existence of Equilibria in Economies with Infinitely Many Commodities. Journal Economic Theory 4, 514-541 (1972)
- [8] Borch, K.: Economic Equilibrium under Uncertainty. International Econ. Rev. 9, 339-347 (1968)
- [9] Bourbaki, N.: General Topology. Part 1 and 2. Hermann. Paris 1966
- [10] -- Elements de Mathematique. Livre V. Espaces vectoriels topologiques. Chapt. I,II. Hermann. Paris 1953
- [11] -- Elements de Mathematiques Livre VI. Integration. Chapt. VI. Hermann. Paris 1959
- [12] Browder, F.: The Fixed Point Theory of Multivalued Mappings in Topological Vector Spaces. Math. Ann. 177, 283-301 (1968)

- [13] Castaing, Ch.: Sur les multiapplications mesurables. Revue Francaise Inform. Rech. Oper. 1, 91-126 (1967)
- [14] Debreu, G.: Theory of value. Wiley. New York 1959
- [15] -- New Concepts and Techniques for Equilibrium Analysis. Intern. Econ. Rev. 3, 257-273 (1962)
- [16] -- Integration of Correspondences. Proc. 5th Berkeley Symp. in Math. Statistics and Probability 1967, Vol. 2, 351-372
- [17] Dierolf, P.: Korrespondenzen und ihre topologischen Eigenschaften. Sonderdruck aus Überblicke der Mathematik, Band 6 - 1973. Bibliographisches Institut AG, Mannheim/Wien/Zürich
- [18] Hausdorff, F.: Set Theory. New York, Chelsea 1957.
- [19] Hildenbrand, W.: Über stetige Korrespondenzen. Operations-Research-Verfahren, Methods of Operations Research III. Meisenheim am Glan 1967; Verlag: Anton Hain. 234-248
- [20] -- Existence of Equilibria for Economies with Production and a Measure Space of Consumers. Econometrica 38, 608-623 (1970)
- [21] Himmelberg, C.J.; Jacobs, M.Q.; van Vleck, F.S.: Measurable Multifunctions, Selectors, and Filippovs Implicit Functions Lemma. J. Math. Anal. Appl. 25, 276-284 (1969)
- [22] Jacobs, M.Q.: On the Approximation of Integrals of Multivalued Functions. SIAM, J. Control 7, 158-177 (1969)

- [23] Köthe, G.: Topological Vector Spaces I. Springer. Berlin-Heidelberg-New York 1969
- [24] Kuratowski, K.: Topology. Vol. 1. Academic Press. New York-Warschau 1966
- [25] Mammitzsch, V.: Bayeslösungen bei mehrstufigen Tests. Z. f. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 19, 123-166 (1971)
- [26] McKenzie, L.W.: On the Existence of General Equilibrium for a Competitive Market. Econometrica 27, 54-71 (1959)
- [27] Neveu, J.: Mathematische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Oldenbourg, München und Wien 1969
- [28] Parthasarathy, T.: Selection Theorems and their Applications. Lecture Notes in Mathematics 263. Springer. Berlin-Heidelberg-New York 1972
- [29] Pilzweger, K.: Endlichstufige Tests bei nicht notwendig endlich vielen Hypothesen. Dissertation, Universität München (1971).
- [30] Radner, R.: Competitive Equilibrium under Uncertainty. Econometrica 36, 31-58 (1968)
- [31] Richter, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie. 2. Aufl. Springer. Berlin-Heidelberg-New York 1966
- [32] -- Verallgemeinerung eines in der Statistik benötigten Satzes der Maßtheorie. Math. Ann. 150, 85-90 (1963)
- [33] Stigum, B.: Competitive Equilibria under Uncertainty. The Quarterly J. Economics 83, 533-561 (1969)

- [34] Walras, L.: Elements d' Economie Politique Pure.
Lausanne 1874
- [35] Wegmann, R.: Der Wertebereich von Vektorintegralen.
Z. f. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 14,
203-238 (1970)

Tabellarischer Lebenslauf

Persönliche Daten: Geboren am 14. Mai 1946 in Brannenburg/Obb.
Eltern: Gerlinde und Erich Seifert
Seit 25. August 1972 verheiratet mit
Helga Seifert, geb. Heise

Schulen: Vom 01. September 1952 bis 20. Juli 1956
Volksschule in Degerndorf/Ldkr. Rosenheim
Vom 01. September 1956 bis 19. Juli 1965
Humanistisches Gymnasium in Rosenheim
Abitur: Juni/Juli 1965

Studium: Vom WS 65/66 bis WS 72/73 Studium der
Mathematik an der Ludwig-Maximilians-
Universität München
Vordiplom: Mai 1968
Hauptdiplom: April/Mai 1971

Berufliche Tätigkeit: Vom WS 70/71 bis WS 72/73 Tutor am Semi-
nar für Ökonometrie und Statistik der
Universität München
Seit 01. Juni 1973 Verwalter der Dienstge-
schäfte eines wissenschaftlichen Assisten-
ten am Lehrstuhl für Ökonometrie der
Universität Regensburg

Hans-Günther Seifert

